Die ebene Trigonometrie

für

den Schul- und Selbst-Unterricht

von

Karl Koppe,
Professor.

Siebente, verbesserte Auflage,

bearbeitet

von

Dr. W. Dahl,
Oberlehrer am Realgymnasium zu Braunschweig.

Mit 5 Figurentafeln.

Essen,
Druck und Verlag von G. D. Bädeker.
1879.

Vorrede zur fünften Auflage.

Aus der Vorrede zur dritten Auflage wird hier Folgendes wiederholt:

„Während in der Geometrie das synthetische, in der Arithmetik das analytische Verfahren vorwaltet, lassen sich die Lehrsätze der Trigonometrie mehrentheils auf beiden Wegen, auf dem Wege der Construction und der Rechnung, herleiten. Bietet das constructive Verfahren den Vortheil größerer Anschaulichkeit dar und wird dasselbe hierdurch für den Anfänger gewöhnlich leichter zugänglich, so gewährt auf der andern Seite die analytische Entwickelung im Wege der Rechnung den Vorzug größerer Kürze und Allgemeingiltigkeit. Trigonometrische Sätze, in deren Beweisen, wenn sie gründlich geführt werden sollen, bei dem constructiven Verfahren mehrere Fälle unterschieden und besonders erörtert werden müssen, können auf dem Wege der Rechnung durch eine einzige einfache Entwickelung in vollster Allgemeingiltigkeit dargethan werden.

Auf der andern Seite ist jedoch nicht in Abrede zu stellen, daß die algebraischen Ausdrücke in ihrer abstracten Form dem weniger Geübten starr und unbelebt erscheinen und die algebraischen Rechnungen, welche häufig nach demselben wiederkehrenden Schema auszuführen sind, denselben eher ermüden als die constructive Behandlungsweise, welche durch ihre Anschaulichkeit, da sie nicht bloß dem Verstande, sondern auch der Einbildungskraft Beschäftigung gewährt, leichter seine Aufmerksamkeit zu fesseln und rege zu erhalten vermag. Indem die trigonometrischen Formeln auf eine im Raume anzuschauende Figur bezogen werden, gewinnen sie für den Anfänger an Deutlichkeit und werden von demselben, da sie ihm gleichsam belebter erscheinen, mit größerer Leichtigkeit und regerem Interesse erfaßt.

Bei den eigenthümlichen Vorzügen, welche hiernach der synthetischen und der analytischen Entwickelung im Wege der Construction und der Rechnung zukommen, und bei der Unterstützung, welche sich dieselben gegenseitig im Unterrichte gewähren, hat der Verfasser, wo für die Begründung der trigonometrischen Lehrsätze der eine, wie der andere Weg offen stand, nicht zwischen denselben gewählt, sondern beide seinen Lesern dargeboten. Was auf diese Art an Kürze eingebüßt worden ist, dürfte durch die angezeigten Vortheile reichlich aufgewogen sein.

Nach des Verfassers Ansicht bildet die Trigonometrie, in welcher die Lehren und die Methode der Algebra sowohl als der Geometrie zur Anwendung kommen, mit Recht den Ausgangspunkt des elementaren mathematischen Unterrichts. Die große Wichtigkeit der Trigonometrie für den Unterricht wird aber noch dadurch erhöht, daß sie dem Anfänger das weiteste Feld zur freien und selbstständigen Uebung seiner Kräfte, eine nie zu erschöpfende Quelle eben so mannigfaltiger als den Kräften des Anfängers angemessener Aufgaben darbietet.

Die in dem dritten Abschnitte zum großen Theile sowohl auf synthetischem als auf analytischem Wege gelösten Aufgaben sollen dem Anfänger als Muster und Anleitung für die eigene Behandlung verwandter Aufgaben dienen, welche nach jenen in den Anmerkungen jedoch ohne Auflösung in nicht unbeträchtlicher Zahl angeführt sind. Nach den Erfahrungen des Verfassers lieben es die Schüler, die Auflösung der nämlichen Aufgabe auf verschiedenen von einander unabhängigen Wegen herbeizuführen.

Die beiden letzten Abschnitte enthalten Anwendungen der ebenen Trigonometrie auf die Feldmeßkunst und einen kurzen Abriß der ebenen Polygonometrie. Bei dem großen Nutzen, welchen die Trigonometrie in praktischer Hinsicht gewährt, wird

selbst im Gymnasium, für welches dieses Lehrbuch vorzugsweise bestimmt ist, auch dieser Seite eine angemessene Berücksichtigung gebühren, obschon dieselbe nicht als das Wichtigste und Hauptsächlichste hervorzuheben sein wird. Die hohe Bedeutung der Trigonometrie als Unterrichtsgegenstand gründet sich weniger auf die Unterstützung, welche dieselbe der Feldmeßkunst und den verschiedenen Zweigen der Naturwissenschaft darbietet, als vielmehr darauf, daß dieselbe für alle studirenden Jünglinge, welches auch immer die Wahl ihres künftigen Berufes sein mag, sich als eins der trefflichsten Bildungsmittel des Verstandes erweist.

Von den bei der neuen Auflage angebrachten Verbesserungen sind die erheblichsten der unter §. 16 eingeschaltete Lehrsatz über das Verhältniß zwischen Bogen, Sinus und Tangente, — die unter §. 40 aufgeführten Sätze über Maxima und Minima der Produkte der Sinus und Tangenten der Theile eines Winkels, eine einfachere und sich durch Anschaulichkeit sehr empfehlende Ableitung der in den §§. 67, 68 und 73 angegebenen Formeln über die Berechnung der Winkel und des Inhalts eines Dreiecks, dessen drei Seiten gegeben sind, — und die Hinzufügung des Anhanges zum zweiten Abschnitte (S. 69) über die Vergleichung des Umfangs und des Inhalts der Figuren.

Soest, im Januar 1871. **Der Verfasser.**

Vorwort zur siebenten Auflage.

Bei der Revision der vorliegenden Auflage ist das Streben des Herausgebers vorzugsweise darauf gerichtet gewesen, den Text des Buches wie die demselben eingefügten Ziffernbeispiele von allen den kleinen Incorrectheiten zu befreien, welche sich in die vorige Auflage eingeschlichen hatten. Wesentliche Aenderungen, welche über dieses Ziel hinausgingen, sind nicht vorgenommen worden, und darf daher der Unterzeichnete das Buch seine neue Wanderung mit dem Wunsche antreten lassen, daß die Freunde, welche es sich bereits früher erworben, ihm auch in Zukunft erhalten bleiben mögen.

Braunschweig, im Februar 1879.

Dr. **Dahl.**

Einleitung.

§. 1. Erklärung.

Während uns die elementare Geometrie die gegenseitige Abhängigkeit räumlicher Größen von einander im allgemeinen kennen lehrt, daß z. B. durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel eines Dreiecks auch die beiden anderen Winkel und die dritte Seite des Dreiecks bestimmt werden, und uns in den Stand setzt, wenn jene gegeben sind, diese durch geometrische Construction zu finden, zeigen die Lehrsätze der Trigonometrie, wie sich aus den Maßzahlen gegebener räumlicher Größen die Maßzahlen gesuchter Größen auf dem Wege der Rechnung herleiten lassen.

Die Trigonometrie setzt hierbei eben so wohl die Lehren der elementaren Geometrie als der Arithmetik und Algebra als bekannt voraus.

Die vorstehende Angabe soll dazu dienen, dem Anfänger vorläufig die Aufgabe der Trigonometrie zu bezeichnen; die genaue Definition kann erst weiter unten im §. 7 gegeben werden.

Bemerkung.

Eine gerade Linie ist sowohl ihrer Lage als ihrer Größe nach durch ihre beiden Endpunkte gegeben; eine gradlinige Figur ist vollständig bestimmt, wenn ihre Ecken gegeben sind; dieses letztere gilt ebenso von einem eckigen Körper. Wir beschäftigen uns demgemäß zunächst mit der Aufgabe, wie durch die Maßzahlen gewisser gemessener Größen (Linien oder Winkel — denn nur diese pflegen wir unmittelbar zu messen —) die Lage eines Punktes festgestellt werden kann. Ehe wir jedoch die allgemeine Aufgabe lösen, die Lage eines Punktes im Raume festzustellen, behandeln wir vorher die einfachere Aufgabe, die Lage eines Punktes in einer Ebene, welche wir als gegeben annehmen, zu bestimmen; und da selbst in einer Linie unzählige Punkte angenommen werden können, so beginnen wir mit der einfachsten Aufgabe, die Lage eines Punktes in einer Linie festzustellen.

§. 2. Erklärung.

Wenn in einer (geraden oder krummen) Linie ein fester Punkt A, Fig. 1, angenommen wird, so ist die Lage eines beliebigen anderen Punktes B bestimmt, wenn der Abstand AB des Punktes B von dem festen Punkte A gegeben und zugleich angezeigt ist, an welcher Seite von A der Punkt B (ob er rechts oder links von A) liegt. Um dieses letztere anzuzeigen, pflegt man für alle diejenigen Punkte, welche an der einen Seite von A liegen, den Maßzahlen ihrer Abstände von dem festen Punkte A das Zeichen (+), das Zeichen (—)

aber vorzuschreiben, wenn dieselben an der entgegengesetzten Seite von A liegen. Den entstandenen positiven oder negativen Zahlen gibt man den Namen Abscissen; der feste Punkt A aber wird der Anfangspunkt der Abscissen genannt.

Nehmen wir hier in der Fig. 1 die nach rechts fallenden Abscissen als positiv, die links liegenden als negativ an, so ist die Abscisse des Punktes B = +AB, die Abscisse des Punktes C = −AC.

In diesen Ausdrücken hat man jedoch unter AB und AC nicht die Linien selbst, sondern die Maßzahlen zu verstehen, welche hervorgehen, wenn diese Linien durch eine bestimmte Einheit gemessen worden sind.

Man begreift nun leicht, daß ein Punkt in der Linie BC vollständig bestimmt ist, wenn man seine Abscisse kennt. — Von dem Anfangspunkte A sagt man, er habe die Abscisse Null.

Ferner sieht man leicht ein, daß es an sich willkürlich ist, nach welcher Seite hin die Abscissen positiv und nach welcher sie negativ gerechnet werden. — Im Folgenden sollen jedoch, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil angegeben wird, in wagerecht gezogenen Linien beständig die rechts fallenden Abscissen positiv, die nach links liegenden negativ, in senkrecht gezogenen Linien die nach oben gehenden Abscissen positiv, die nach unten fallenden negativ angenommen werden.

Das Vorstehende läßt zwar die Anwendung der Vorzeichen (+) und (−) als ein einfaches und bequemes Hilfsmittel, um den Gegensatz in der Lage zweier Linien bemerklich zu machen, erkennen; daß dieselbe aber aus der Natur der Sache mit Nothwendigkeit folgt, wird sich mit voller Entschiedenheit erst weiter unten bei der Umwandlung der Coordinaten herausstellen.

§. 3. Erklärung.

Um die Lage eines oder mehrerer Punkte in einer Ebene zu bestimmen, pflegt man in derselben zwei sich unter rechten Winkeln durchschneidende feste Linien, Axen, anzunehmen. Die eine derselben AX, Fig. 2, nennt man die Abscissenaxe, die andere AY die Ordinatenaxe. Um nun die Lage eines Punktes (C) in der Ebene festzustellen, zieht man durch denselben zwei den Axen parallele Linien (CD und CE) und bestimmt die Abscissen der Einschnittspunkte (D und E) dieser Linien in die Axen, indem man den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt (A) der beiden Axen als Anfangspunkt annimmt. Um aber die Abscisse auf der einen Axe von der auf der andern unterscheiden zu können, gibt man der auf die Ordinatenaxe (AY) fallenden Abscisse (AE) den Namen Ordinate und behält die Benennung Abscisse nur für die auf der Abscissenaxe (AX) abzumessende Abscisse (AD) bei. Abscissen und Ordinaten faßt man unter dem gemeinschaftlichen Namen Coordinaten zusammen.

Nehmen wir, wie schon oben bemerkt, die vom Anfangspunkte A nach rechts hin abgeschnittenen Abscissen und die nach oben hin fallenden Ordinaten als positiv an, und bezeichnen wir der Kürze wegen die Abscissen mit x, die Ordinaten mit y, so ist z. B.

für den Punkt C $x = +AD$, $y = +AE = +CD$,
" " " F $x = -AG$, $y = +AH = +FG$,
" " " K $x = -AL$, $y = -AM = -KL$,
" " " N $x = +AO$, $y = -AP = -NO$.

Man sieht hiernach leicht, daß die Lage eines Punktes vollständig bestimmt ist, wenn seine beiden Coordinaten gegeben sind. Ferner wollen wir noch bemerken, daß man gewöhnlich durch den zu bestimmenden Punkt nur die der Ordinatenaxe Parallele zieht und die Ordinaten

$$+ AE, + AH, - AM, - AP$$

beziehlich durch $+ CD, + FG, - KL, - NO$

ersetzt.

Nennen wir die vier rechten Winkel, in welche die unbegrenzte Ebene durch die beiden Coordinatenaxen getheilt wird, Regionen und zählen dieselben in der Ordnung, in welcher dies die Fig. 2 anzeigt, so sind

in der ersten Region	die Abscissen	positiv,	die Ordinaten positiv,
„ „ zweiten „	„ „	negativ,	„ „ positiv,
„ „ dritten „	„ „	negativ,	„ „ negativ,
„ „ vierten „	„ „	positiv,	„ „ negativ.

Um die Lage eines Punktes im Raume festzustellen, nimmt man drei feste Ebenen an, welche auf einander senkrecht stehen und sich folglich in drei ebenfalls auf einander senkrechten Linien, Axen, durchschneiden, construirt durch den zu bestimmenden Punkt den festen Ebenen parallele Ebenen und mißt die durch diese Construction von den Axen abgeschnittenen Coordinaten. Wir berühren jedoch diesen Gegenstand hier nur kurz, da wir im Folgenden von demselben keine Anwendung zu machen beabsichtigen.

§. 4. Erklärung.

Um die Lage eines Punktes in einer Ebene zu bestimmen, kann man auch das folgende Verfahren anwenden. Man nimmt zunächst in der Ebene einen festen Punkt A, den Pol, Fig. 3, und eine von demselben ausgehende Linie AX, die Axe, an und bestimmt den Abstand AC des in Rede stehenden Punktes C vom Pole und den Winkel CAX, um welchen die Axe AX nach einer vorgeschriebenen Seite hin gedreht werden muß, um in die Lage AC zu gelangen. Die Linie AC wird der Radius vector, auch kurzweg der Radius, der Winkel CAX aber der Abweichungswinkel genannt.

Da zwei von einem Punkte ausgehende Linien eben sowohl einen hohlen als einen erhabenen Winkel einschließen, die Axe AX sowohl durch eine Drehung nach der einen als nach der anderen Seite hin in die Lage AC geführt werden kann, so muß zugleich die Richtung, in welcher wir uns diese Drehung vollzogen denken, gegeben sein, um die Wahl zwischen zwei sich zu 360^0 ergänzenden Werthen des Abweichungswinkels zu entscheiden. Nehmen wir an, daß diese Drehung in der Richtung erfolgen soll, welche der in der Fig. 3 beigesetzte Pfeil anzeigt, so ist der Abweichungswinkel für den Radius AC ein spitzer, für AD ein stumpfer, für AE ein flacher, für AF um den spitzen Winkel EAF größer als ein flacher und für AG um den stumpfen Winkel EAG größer als ein flacher.

Man gibt dem Radius vector und dem Abweichungswinkel zusammen den Namen Polar-Coordinaten und nennt zum Unterschiede hiervon Abscisse und Ordinate rechtwinklige Coordinaten.

Wenn im Folgenden zur Bestimmung der Lage eines Punktes zugleich rechtwinklige und Polar-Coordinaten in Anwendung kommen, so wird durchgehends vorausgesetzt, daß die Axe der letzteren mit dem positiven Schenkel der Abscissenaxe zusammenfällt und die Drehung der Axe, durch welche wir

uns den Abweichungswinkel erzeugt denken, nach der Seite hin erfolgt, an welcher die positiven Ordinaten liegen.

Da die Drehung der Axe nach zwei entgegengesetzten Seiten hin erfolgen kann, so kann man auch die an der einen Seite liegenden Abweichungswinkel als positiv, die an der entgegengesetzten Seite liegenden als negativ annehmen. Man erhält so zur Bestimmung der Lage des Radius vector zwei Werthe des Abweichungswinkels, einen positiven und einen negativen, welche jedoch, nach entgegengesetzten Seiten an die Axe angetragen, eine gleiche Lage des Radius vector ergeben. So kann man z. B. in Figur 3 den Abweichungswinkel von AG eben sowohl durch $-XAG$ als durch $+(180^0 + EAG)$ ausdrücken.

§. 5. Lehrsatz.

Sind x und y die Coordinaten irgend eines Punktes B, Fig. 4, und ist r der Radius vector dieses Punktes, so ist

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

Bew. Liegt der Punkt B in der ersten Region, so ist $x = +AC$, $y = +BC$ und $r = AB$. Nach dem pythagoräischen Lehrsatze ist

$$AB^2 = AC^2 + BC^2,$$

also

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

Dieselbe Gleichung gilt auch dann noch, wenn der fragliche Punkt in einer der anderen Regionen liegt, in denen die Abscissen oder Ordinaten negative Werthe erhalten, da auch die Quadrate negativer Zahlen allemal positiv sind.

§. 6. Lehrsatz.

Wenn zwei Punkte B und B', Fig. 5, gleiche Abweichungswinkel haben, also auf einer durch den Anfangspunkt gehenden geraden Linie liegen, so findet zwischen den Radien, den Abscissen und Ordinaten derselben das nämliche Verhältniß statt; also wenn wir die Radien mit r und r', die Abscissen mit x und x' und die Ordinaten mit y und y' bezeichnen, so ist

$$r : r' = x : x' = y : y'.$$

Beweis. Fällt zunächst die durch den Anfangspunkt A und die fraglichen Punkte B und B' gehende Gerade in die erste Region, so ist Dreieck

$$ABC \sim AB'C'$$

und es verhält sich folglich

$$AB : AB' = AC : AC' = BC : B'C',$$

d. h.

$$r : r' = x : x' = y : y'.$$

Diese Proportionen bleiben aber auch dann noch richtig, wenn die fraglichen Punkte in einer der drei anderen Regionen liegen und daher die Coordinaten derselben theils positive theils negative Werthe erhalten, weil für beide Punkte, da sie nothwendig in die nämliche Region fallen, die Werthe der Abscissen oder Ordinaten gleichzeitig positiv und gleichzeitig negativ werden.

Erster Abschnitt.

Von den trigonometrischen Functionen.

(Analytische Trigonometrie.)

A. Von den Werthen der trigonometrischen Functionen im allgemeinen.

§. 7. Erklärung.

Wie wir so eben gesehen haben, sind für mehrere Punkte, welche auf der nämlichen durch den Anfangspunkt gehenden geraden Linie liegen, für welche also der Abweichungswinkel derselbe ist, auch die Verhältnisse zwischen Radius, Abscisse und Ordinate die nämlichen und von der Länge dieser Linien, insbesondere von der Größe des Radius, ganz unabhängig; dagegen ändert sich offenbar die Größe dieser Verhältnisse, wenn der Abweichungswinkel der Linie, auf welcher jene Punkte liegen, zu- oder abnimmt. Mithin wird die Größe jener Verhältnisse durch die Größe des Abweichungswinkels bedingt. Eine Größe aber, welche von einer anderen abhängig ist, nennt man eine Function der letzteren und zwar werden die gedachten Verhältnisse goniometrische Functionen genannt; insbesondere heißt

das Verhältniß der Ordinate zum Radius der Sinus,
das Verhältniß der Abscisse zum Radius der Cosinus,
das Verhältniß der Ordinate zur Abscisse die Tangente,
das Verhältniß der Abscisse zur Ordinate die Cotangente,
das Verhältniß des Radius zur Abscisse die Secante,
das Verhältniß des Radius zur Ordinate die Cosecante

des Winkels, welchen der Radius mit der Abscissenaxe bildet.

Bezeichnen wir daher den Winkel, welchen eine durch den Anfangspunkt gehende Gerade mit der Abscissenaxe bildet, mit α, Fig. 4, den Radius vector für irgend einen Punkt derselben mit r, die Abscisse dieses Punktes mit x, die Ordinate mit y, so ist

$$\sin\alpha = \frac{y}{r}, \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r},$$

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{y}{x}, \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{x}{y},$$

$$\sec\alpha = \frac{r}{x}, \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{r}{y}.$$

Die Lehre von den goniometrischen Functionen wird Trigonometrie genannt. Man sagt demgemäß auch statt goniometrische Functionen gewöhnlich trigonometrische Functionen.

Von den oben angegebenen trigonometrischen Functionen werden wir im Folgenden vorzugsweise die vier ersten, Sinus, Cosinus, Tangente und Cotangente, berücksichtigen; dagegen wird von der Secante und Cosecante nur ausnahmsweise an wenigen Stellen die Rede sein, da die Secante nichts anders als die Reciproke des Cosinus und die Cosecante gleich der Reciproke des Sinus ist, und sich daher Secante und Cosecante leicht durch Cosinus und Sinus ersetzen lassen.

§. 8. Zusatz.

Zufolge der vorstehenden Erklärung werden die trigonometrischen Functionen eines Winkels α, Fig. 4, gefunden, wenn man einen Schenkel desselben AX als positiven Schenkel der Abscissenaxe und den Scheitel A als Anfangspunkt betrachtet, ferner auf dem andern Schenkel einen beliebigen Punkt B annimmt und für diesen Punkt den Radius r, die Abscisse x und die Ordinate y bestimmt. Da es bei dieser Bestimmung lediglich auf Ermittelung der zwischen den drei Linien bestehenden Verhältnisse ankommt, so ist es einerlei, welche Einheit beim Messen der genannten Linien zu Grunde gelegt wird, vorausgesetzt, daß die beiden Linien, deren Verhältniß ermittelt werden soll, durch einerlei Maß gemessen werden. Die gefundenen Verhältnisse sind die trigonometrischen Functionen.

Ueber die Beschaffenheit dieser Functionen ergibt sich sofort Folgendes:

Sinus und Cosinus sind immer ächte (positive oder negative) Brüche oder höchstens gleich 1, weil die Ordinate und Abscisse immer kleiner als der Radius sind oder höchstens diesem gleich werden können. Aus gleichen Gründen sind Secante und Cosecante immer unächte Brüche. Dagegen können Tangente und Cotangente eben sowohl ächte wie unächte Brüche sein, da zwischen der Ordinate und Abscisse jedes beliebige Verhältniß stattfinden kann.

Für den Anfänger dürfte es sich empfehlen, die oben angegebene Construction an einer Reihe von Winkeln, deren Größe am Transporteur abgelesen werden kann, so genau wie möglich praktisch auszuführen und die erhaltenen Linien mit Hilfe eines gut eingetheilten Maßstabes abzumessen. Können die auf diesem Wege gewonnenen Resultate auch keinen Anspruch auf besondere Genauigkeit machen, so erfüllen dieselben doch den Zweck, dem Anfänger eine klare und bestimmte Vorstellung von den trigonometrischen Functionen zu verschaffen und genügen jedenfalls so lange, bis wir weiter unten ein Verfahren kennen gelernt haben, welches auf dem Wege der Rechnung zu genaueren Resultaten führt.

§. 9. Zusatz.

Wenn wir uns zunächst in Beziehung auf den Sinus und Cosinus mit der Untersuchung beschäftigen, wie die Größe derselben von der Größe des Winkels abhängt, mit dem wachsenden Winkel gleichzeitig zu- oder abnimmt, so werden wir uns die Vergleichung erleichtern, wenn wir für sämmtliche Winkel dem Radius vector dieselbe Größe geben, indem dann die dem Sinus und Cosinus gleichen Verhältnisse oder Brüche alle den nämlichen Nenner erhalten. Wir beschreiben demgemäß um den Scheitelpunkt (Anfangspunkt) C, Fig. 6, mit einem beliebigen Radius r einen Kreis.

Denken wir uns ferner, daß sämmtliche in Betracht kommenden Winkel durch eine in derselben Richtung erfolgende Drehung des (beweglich gedachten) Schenkels entstehen und zwar in einer Richtung, welche auf dem kürzesten Wege von dem positiven Schenkel der Abscissenaxe zu dem positiven Schenkel der Ordinatenaxe, also von A über B, D, E, F, G, H, K nach A führt, daß mithin beispielsweise unter dem W. ACG nicht der stumpfe, sondern der erhabene Winkel zu verstehen ist, so lassen sich (vergl. §. 3) aus der Figur unmittelbar folgende Gleichungen ablesen:

$$\sin ACB = \frac{+BL}{r} = +\frac{BL}{r}, \quad \sin ACE = \frac{+EM}{r} = +\frac{EM}{r},$$

$$\sin ACG = \frac{-GM}{r} = -\frac{GM}{r}, \quad \sin ACK = \frac{-KL}{r} = -\frac{KL}{r}.$$

Hieraus folgt, daß der Sinus im ersten und zweiten Quadranten positiv, im dritten und vierten negativ ist.

Wird W. ACB kleiner, rückt also der Punkt B näher an A heran, so wird auch die Ordinate kleiner; verschwindet W. ACB, fällt mithin der Punkt B mit A zusammen, so wird auch die Ordinate $= 0$; mithin ist

$$\sin 0 = \frac{0}{r} = 0.$$

Wird W. ACB größer, nähert sich also der Punkt B dem Punkte D, so nähert sich auch die Ordinate dem Radius und wird, wenn B mit D zusammenfällt, diesem gleich; also ist

$$\sin 90^0 = \frac{+r}{r} = +1.$$

Ebenso läßt sich leicht erkennen, daß

$$\sin 180^0 = 0,$$
$$\sin 270^0 = -1,$$
$$\sin 360^0 = 0$$

wird.

Demnach durchläuft bei zunehmendem Winkel der Sinus
im ersten Quadranten die Werthe von 0 bis $+1$,
im zweiten Quadranten von $+1$ bis 0,
im dritten Quadranten von 0 bis -1,
im vierten Quadranten von -1 bis 0.

Aus derselben Figur ergeben sich für den Cosinus die Gleichungen:

$$\cos ACB = \frac{+CL}{r} = +\frac{CL}{r}, \quad \cos ACE = \frac{-CM}{r} = -\frac{CM}{r},$$

$$\cos ACG = \frac{-CM}{r} = -\frac{CM}{r}, \quad \cos ACK = \frac{+CL}{r} = +\frac{CL}{r}.$$

Hiernach ist der Cosinus im ersten und vierten Quadranten positiv, im zweiten und dritten negativ.

Berücksichtigen wir ferner, daß, wenn der Winkel ACB kleiner wird, die Abscisse CL sich vergrößert, bis sie beim Verschwinden des Abweichungswinkels dem Radius r gleich, also $\cos 0 = +\frac{r}{r} = +1$ wird, daß die Abscisse dieselbe absolute Größe, aber mit negativem Vorzeichen erhält, sobald der Abweichungswinkel zu 180^0 angewachsen ist, wodurch also $\cos 180^0 = -1$ wird, und daß endlich für 90^0 und 270^0 die Abscisse und mithin gleichzeitig der Cosinus verschwindet, so ergibt sich für die Werthe, welche der Cosinus annimmt, folgende Zusammenstellung:

Der Cosinus durchläuft bei wachsendem Winkel
im ersten Quadranten die Werthe von $+1$ bis 0,
im zweiten Quadranten von 0 bis -1,
im dritten Quadranten von -1 bis 0,
im vierten Quadranten von 0 bis $+1$.

§. 10. Zusatz.

Um auch für die Tangenten verschiedener Winkel Brüche mit demselben Nenner zu erhalten, ziehen wir durch den Punkt A, Fig. 6, in welchem der positive Schenkel der Abscissenaxe den mit beliebigem Radius r um den Punkt C

beschriebenen Kreis schneidet, eine den Kreis berührende Linie NO und verlängern den zweiten Schenkel CB des (veränderlich gedachten) W. ACB so weit, bis er dieselbe in N trifft. Dann ist $\triangle$ BCL $\sim$ NCA, mithin ist

$$\text{tang ACB} = \frac{+\,BL}{+\,CL} = +\frac{BL}{CL} = +\frac{AN}{r}.$$

Führen wir dieselbe Construction für den Winkel ACE aus, so verhält sich wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke ECM und OCA EM : CM = AO : CA. Mithin ist

$$\text{tang ACE} = \frac{+\,EM}{-\,CM} = -\frac{EM}{CM} = -\frac{AO}{r}.$$

Ebenso finden wir für den dritten und vierten Quadranten

$$\text{tang ACG} = \frac{-\,GM}{-\,CM} = +\frac{GM}{CM} = +\frac{AN}{r}$$

und

$$\text{tang ACK} = \frac{-\,KL}{+\,CL} = -\frac{KL}{CL} = -\frac{AO}{r}.$$

Diese vier Gleichungen zeigen zunächst, daß die Tangente im ersten und dritten Quadranten positiv, im zweiten und vierten negativ ist.

Wie aus der Figur sofort zu erkennen, verschwindet AN wie AO, wenn der Abweichungswinkel zu Null oder zu 180^0 wird; mithin ist tang $0 = 0$ und tang $180^0 = 0$. Dagegen rückt, wenn der Abweichungswinkel zu 90^0 bezw. 270^0 angewachsen ist, der Einschnittspunkt des verlängerten Radius in die (dem Radius dann parallel laufende) Berührungslinie in unendliche Entfernung; es wird also tang 90^0 ebenso wie

$$\text{tang } 270^0 \text{ zu } \frac{\infty}{r} = \infty \text{ *)}.$$

Berücksichtigen wir schließlich noch, daß alle positiven Zahlenwerthe zwischen 0 und $+\infty$, alle negativen zwischen 0 und $-\infty$ liegen, so gelangen wir über das Verhalten der Tangente in den verschiedenen Quadranten leicht zu folgenden Behauptungen:

Die Tangente durchläuft bei zunehmendem Winkel
im ersten Quadranten die Werthe von 0 bis $+\infty$,
im zweiten Quadranten von $-\infty$ bis 0,
im dritten Quadranten von 0 bis $+\infty$,
im vierten Quadranten von $-\infty$ bis 0.

Weiter brauchen wir wohl kaum noch anzuführen, daß sich der Name trigonometrische Tangente darauf bezieht, daß sich zufolge der angegebenen Construction die Größe derselben bequem durch das Verhältniß einer auf der geometrischen Tangente NO abgeschnittenen Strecke zum Radius des Kreises darstellen läßt.

§. 11. Zusatz.

Für die Cotangente entwerfen wir folgende Construction: Durch den Punkt D, in welchem der positive Schenkel der Ordinatenaxe den Kreis durchschneidet, Fig. 6, ziehen wir die Berührungslinie ST und verlängern den beweglich gedachten Schenkel des der Abscissenaxe anliegenden Winkels so weit, bis er diese Berührungslinie trifft. Da nun

$$\text{cotg ACB} = \frac{+\,CL}{+\,BL} = +\frac{CL}{BL}$$

*) Das Zeichen ∞ bedeutet unendlich.

und, wie leicht zu sehen, $\triangle BCL \sim CSD$ ist, also $CL : BL = DS : CD$ sich verhält, so ist
$$\operatorname{cotg} ACB = + \frac{DS}{r}.$$

Ferner ist
$$\operatorname{cotg} ACE = \frac{-CM}{+EM} = -\frac{CM}{EM} = -\frac{DT}{r},$$
letzteres wegen Aehnlichkeit der Dreiecke CEM und TCD. Ebenso ist
$$\operatorname{cotg} ACG = \frac{-CM}{-GM} = +\frac{CM}{GM} = +\frac{DS}{r}$$
und
$$\operatorname{cotg} ACK = \frac{+CL}{-KL} = -\frac{CL}{KL} = -\frac{DT}{r}.$$

Hiernach ist die Cotangente (ebenso wie die Tangente) im ersten und dritten Quadranten positiv, im zweiten und vierten negativ.

Was ferner die Werthe, welche dieselbe erhalten kann, anbelangt, so folgt durch eine ähnliche Ueberlegung, wie bei der Tangente, daß die Cotangente bei wachsendem Winkel

im ersten Quadranten die Werthe von $+\infty$ bis 0,
im zweiten Quadranten von 0 bis $-\infty$,
im dritten Quadranten von $+\infty$ bis 0,
im vierten Quadranten von 0 bis $-\infty$ durchläuft.

Obgleich wir, wie bereits oben bemerkt, von der Secante und Cosecante nur in seltenen Fällen Gebrauch machen werden, so wollen wir doch der Vollständigkeit wegen deren Verhalten in den einzelnen Quadranten noch kurz entwickeln.

Nach §. 7 ist $\sec \alpha = \frac{r}{x}$. Da nun r stets positiv bleibt, so richtet sich das Vorzeichen der Secante lediglich nach dem der Abscisse; die Secante ist mithin im ersten und vierten Quadranten positiv, im zweiten und dritten negativ. Ferner ist, Fig. 6,
$$\sec ACB = \frac{CB}{CL} = \frac{CN}{r},$$
ein Werth, welcher für $ACB = 0$ in $\frac{r}{r} = 1$ und für $ACB = 90^0$ in $\frac{\infty}{r} = \infty$ übergeht. Da entsprechende Werthe bei 180^0 und 270^0 wiederkehren, so durchläuft die Secante bei zunehmendem Winkel

im ersten Quadranten die Werthe von $+1$ bis $+\infty$,
im zweiten Quadranten von $-\infty$ bis -1,
im dritten Quadranten von -1 bis $-\infty$,
im vierten Quadranten von $+\infty$ bis $+1$.

Das Vorzeichen der Cosecante, welche nach §. 7 den Bruch $\frac{r}{y}$ bedeutet, richtet sich nach dem der Ordinate, wonach also die Cosecante im ersten und zweiten Quadranten positiv, im dritten und vierten negativ ist. Ferner folgt aus Fig. 6
$$\operatorname{cosec} ACB = \frac{BC}{BL} = \frac{CS}{r}.$$
Für $ACB = 0$ wird $CS = \infty$; wächst ACB bis 90^0, so wird $CS = r$. Da entsprechende Werthe bei 180^0 und 270^0 sich abermals finden, so durchläuft also bei zunehmendem Winkel die Cosecante

im ersten Quadranten die Werthe von $+\infty$ bis $+1$,
im zweiten Quadranten von $+1$ bis $+\infty$,
im dritten Quadranten von $-\infty$ bis -1,
im vierten Quadranten von -1 bis $-\infty$.

Die Winkel, deren trigonometrische Functionen bisher Gegenstand der Erörterung gewesen sind, entstanden, wie dies oben §. 9 ausdrücklich hervorgehoben wurde, durch Drehung des beweglichen Schenkels in der Richtung ADFH (Fig. 6). Drehen wir von der Anfangslage CA aus den beweglichen Schenkel in entgegengesetzter Richtung, also über HFD nach A zurück, so erhalten wir Winkel, welche, weil eben durch Drehung in entgegengesetzter Richtung entstanden, als negative zu bezeichnen sind. Sind zwei Winkel, ein positiver und ein negativer, der absoluten Größe nach gleich, sind z. B. an den positiven Schenkel der Abscissenaxe CA, Fig. 6, zwei der absoluten Größe nach gleiche Winkel ACB und ACK nach entgegengesetzten Seiten angetragen, und verbinden wir die Punkte B und K, in welchen der um C beschriebene Kreis die Schenkel CB und CK schneidet, mit einander, so ist in dem gleichschenkligen Dreiecke BCK der Winkel an der Spitze halbirt, mithin CL $\perp$ BK und BL = LK. Die Punkte B und K haben also dieselbe Abscisse (CL) und der absoluten Größe nach gleiche, aber dem Vorzeichen nach entgegengesetzte Ordinaten (+ BL und — KL). Daraus folgt, wenn wir der Kürze wegen W. ACB α, also ACK $-\alpha$ nennen,

$$\sin -\alpha = \frac{-KL}{r} = -\frac{KL}{r} = -\frac{BL}{r} = -\sin\alpha,$$

$$\cos -\alpha = \frac{+CL}{r} = +\cos\alpha,$$

$$\tang -\alpha = \frac{-KL}{+CL} = -\frac{KL}{CL} = -\frac{BL}{CL} = -\tang\alpha,$$

und $$\cotg -\alpha = \frac{+CL}{-KL} = -\frac{CL}{KL} = -\frac{CL}{BL} = -\cotg\alpha.$$

Wie leicht zu übersehen, sind die gewonnenen Resultate von der absoluten Größe des W. α unabhängig, gelten also ganz allgemein.

§. 12. Zusatz.

Wenn wir die vorstehende Entwicklung über das Verhalten der trigonometrischen Functionen in den einzelnen Quadranten nochmals überblicken, so werden wir leicht bemerken, daß dieselben sämmtlich, abgesehen vom Vorzeichen, schon im ersten Quadranten ihre größten und kleinsten Werthe erreichen, und da sie von den einen zu den andern continuirlich übergehen, auch alle zwischenliegenden Werthe durchlaufen. Es muß daher möglich sein, die trigonometrischen Functionen in den drei übrigen Quadranten durch die im ersten zu ersetzen. Um in dieser Hinsicht zu bestimmten Resultaten zu gelangen, zeichnen wir in den mit r um C beschriebenen Kreis, Fig. 6, das Rechteck BEGK, dessen Seiten mit der Abscissenaxe AF und der Ordinatenaxe DH parallel laufen. Setzen wir nun der Kürze wegen W. ACB = α, so ist, da ACB = ECM = MCG = KCL leicht erwiesen werden kann, W. ACE = $180^0 - \alpha$, ACG = $180^0 + \alpha$, ACK = $360^0 - \alpha$. Sodann ist $\sin\alpha = +\frac{BL}{r}$, $\sin(180^0 - \alpha) = +\frac{EM}{r}$, $\sin(180^0 + \alpha) = -\frac{GM}{r}$,

$\sin(360^0 - \alpha) = -\frac{KL}{r}$. Nun ist aber BL = EM = GM = KL, also ist

$$1)\ \mathbf{sin}(180^0 - \alpha) = +\ \mathbf{sin}\,\alpha$$
$$2)\ \sin(180^0 + \alpha) = -\sin\alpha$$
$$3)\ \sin(360^0 - \alpha) = -\sin\alpha.$$

Weiter ist in der nämlichen Figur

$\cos\alpha = +\frac{CL}{r}$, $\cos(180^0 - \alpha) = -\frac{CM}{r}$, $\cos(180^0 + \alpha) = -\frac{CM}{r}$,

$\cos(360^0 - \alpha) = +\frac{CL}{r}$, folglich, da offenbar CL = CM ist,

$$4)\ \mathbf{cos}(180^0 - \alpha) = -\ \mathbf{cos}\,\alpha$$
$$5)\ \cos(180^0 + \alpha) = -\cos\alpha$$
$$6)\ \cos(360^0 - \alpha) = +\cos\alpha.$$

Ferner ist $\tan\alpha = +\frac{AN}{r}$, $\tan(180^0 - \alpha) = -\frac{AO}{r}$, $\tan(180^0 + \alpha)$ $= +\frac{AN}{r}$, $\tan(360^0 - \alpha) = -\frac{AO}{r}$, mithin, da AN = AO leicht erwiesen werden kann,

$$7)\ \mathbf{tang}(180^0 - \alpha) = -\ \mathbf{tang}\,\alpha$$
$$8)\ \tan(180^0 + \alpha) = +\tan\alpha$$
$$9)\ \tan(360^0 - \alpha) = -\tan\alpha.$$

Endlich ist $\cot\alpha = +\frac{DS}{r}$, $\cot(180^0 - \alpha) = -\frac{DT}{r}$, $\cot(180^0 + \alpha)$ $= +\frac{DS}{r}$, $\cot(360^0 - \alpha) = -\frac{DT}{r}$, woraus, weil DS = DT ist, folgt:

$$10)\ \mathbf{cotg}(180^0 - \alpha) = -\ \mathbf{cotg}\,\alpha$$
$$11)\ \cot(180^0 + \alpha) = +\cot\alpha$$
$$12)\ \cot(360^0 - \alpha) = -\cot\alpha.$$

Durch die Gleichungen (1) bis (12) werden wir in den Stand gesetzt, die trigonometrischen Functionen derjenigen Winkel, welche größer als 90^0 sind, durch die Functionen der Winkel unter 90^0 zu ersetzen. Sollen z. B. die trigonometrischen Functionen eines Winkels von 130^0 ausgedrückt werden, so setzen wir $130^0 = 180^0 - 50^0$. Dann ist zufolge der Gleichungen 1, 4, 7 und 10

$$\sin 130^0 = +\sin 50^0,\ \cos 130^0 = -\cos 50^0,$$
$$\tan 130^0 = -\tan 50^0,\ \cot 130^0 = -\cot 50^0.$$

Ist ferner ein in den dritten Quadranten reichender Winkel, z. B. von 200^0, gegeben, so zerfällen wir denselben in $200^0 = 180^0 + 20^0$ und erhalten zufolge der Gleichungen 2, 5, 8 und 11

$$\sin 200^0 = -\sin 20^0,\ \cos 200^0 = -\cos 20^0,$$
$$\tan 200^0 = +\tan 20^0,\ \cot 200^0 = +\cot 20^0.$$

Reicht endlich der gegebene Winkel bis in den vierten Quadranten, enthält derselbe z. B. 290^0, so setzen wir $290^0 = 360^0 - 70^0$ und bekommen folglich vermöge der Gleichungen 3, 6, 9 und 12

$$\sin 290^0 = -\sin 70^0,\ \cos 290^0 = +\cos 70^0,$$
$$\tan 290^0 = -\tan 70^0,\ \cot 290^0 = -\cot 70^0.$$

Da der Schenkel, durch dessen Drehung der Winkel entsteht, auch dann noch weiter bewegt werden kann, nachdem er seine Anfangslage wieder erreicht hat, so können auch Winkel in Betracht gezogen werden, welche größer sind als 360^0. Weil aber die Schenkel solcher Winkel, welche sich um 360^0 oder ein Vielfaches von 360^0 unterscheiden, sich offenbar decken, so müssen auch ihre trigonometrischen Functionen dieselben sein, und wir werden daher, wenn wir ein Vielfaches von 360^0 durch $n \,.\, 360^0$ ausdrücken, zu den obigen Gleichungen noch die folgenden hinzufügen können:

$$13)\ \sin\ (n \cdot 360^0 + \alpha) = \sin \alpha$$
$$14)\ \cos\ (n \cdot 360^0 + \alpha) = \cos \alpha$$
$$15)\ \mathrm{tang}\ (n \cdot 360^0 + \alpha) = \mathrm{tang}\ \alpha$$
$$16)\ \mathrm{cotg}\ (n \cdot 360^0 + \alpha) = \mathrm{cotg}\ \alpha.$$

§. 13. Zusatz.

Von den Gleichungen des vorhergehenden §. sind uns die wichtigsten:

$$1)\ \sin\ (180^0 - \alpha) = + \sin \alpha$$
$$4)\ \cos\ (180^0 - \alpha) = - \cos \alpha$$
$$7)\ \mathrm{tang}\ (180^0 - \alpha) = - \mathrm{tang}\ \alpha$$
$$10)\ \mathrm{cotg}\ (180^0 - \alpha) = - \mathrm{cotg}\ \alpha$$

da dieselben, besonders in der eigentlichen Trigonometrie, die häufigste Anwendung finden, indem ein Dreieck eben sowohl spitze als stumpfe, aber keine erhabenen Winkel enthalten kann. Wir sprechen daher diese Gleichungen noch besonders in Worten aus:

Der Sinus des stumpfen Winkels ist gleich dem Sinus des spitzen Nebenwinkels; der Cosinus, die Tangente oder Cotangente des stumpfen Winkels sind dem negativen Cosinus, der negativen Tangente oder Cotangente des spitzen Nebenwinkels gleich.

Bemerkung.

Während wir in §. 12 gesehen haben, daß die trigonometrischen Functionen, abgesehen vom Vorzeichen, schon im ersten Quadranten alle Werthe durchlaufen, deren dieselben überhaupt fähig sind, zeigt uns der folgende §., daß in der zweiten Hälfte des Quadranten sich die Sinus oder Cosinus durch Cosinus oder Sinus solcher Winkel, welche in die erste Hälfte des Quadranten fallen, ersetzen lassen, und daß die gleiche Beziehung zwischen Tangente und Cotangente stattfindet.

§. 14. Lehrsatz.

Wenn zwei Winkel sich zu 90^0 ergänzen, so ist der Sinus des einen gleich dem Cosinus des andern und die Tangente des einen gleich der Cotangente des andern. Ist z. B. der eine dieser Winkel $= \alpha$, der andere also $= 90^0 - \alpha$, so ist

$$1)\ \sin\ (90^0 - \alpha) = \cos\ \alpha, \quad 2)\ \cos\ (90^0 - \alpha) = \sin\ \alpha,$$
$$3)\ \mathrm{tang}\ (90^0 - \alpha) = \mathrm{cotg}\ \alpha, \quad 4)\ \mathrm{cotg}\ (90^0 - \alpha) = \mathrm{tang}\ \alpha.$$

Beweis. Ist W. $ACB = \alpha$, $ACD = 90^0$, so ist $BCD = 90^0 - \alpha$, Fig. 6. Nehmen wir nun für den W. $ACB = \alpha$ AC als positiven Schenkel der Abscissenaxe und CD als positiven Schenkel der Ordinatenaxe, dagegen für den W. BCD $= 90^0 - \alpha$ CD als positiven Schenkel der Abscissenaxe und AC als positiven Schenkel der Ordinatenaxe an, so ist

$$1)\ \sin\ (90^0 - \alpha) = \frac{BP}{r} = \frac{CL}{r} = \cos\alpha$$

$$2)\ \cos\ (90^0 - \alpha) = \frac{CP}{r} = \frac{BL}{r} = \sin\alpha$$

$$3)\ \tang\ (90^0 - \alpha) = \frac{DS}{r} = \cotg\alpha$$

$$4)\ \cotg\ (90^0 - \alpha) = \frac{AN}{r} = \tang\alpha.$$

Ergänzen sich zwei Winkel zu 90^0, so pflegt man den einen das Complement des andern zu nennen. Die eben aufgestellten Gleichungen lassen sich daher auch in Worten also aussprechen:

Der Cosinus und die Cotangente eines Winkels ist gleich dem Sinus und der Tangente seines Complementes. Die Benennungen Cosinus und Cotangente sind Abkürzungen der vollständigeren Ausdrücke complementi sinus und tangens.

Anm. Zu den obigen Gleichungen lassen sich der Vollständigkeit wegen noch folgende hinzufügen

$$5)\ \sec\ (90^0 - \alpha) = \frac{CS}{r} = \cosec\alpha,$$

$$6)\ \cosec(90^0 - \alpha) = \frac{CN}{r} = \sec\alpha.$$

Eigentlich sind die Gleichungen (2), (4), (6) schon in (1), (3), (5) enthalten. Wir haben jedoch wegen der häufigen Anwendung, welche der vorstehende Lehrsatz auch in der durch die Gleichungen (2), (4) und (6) angegebenen Form findet, diese Gleichungen nicht übergehen mögen.

Die Gleichungen (1) bis (6), welche zunächst unter der Voraussetzung, daß α positiv und $< 90^0$ ist, bewiesen sind, gelten übrigens nicht blos unter dieser beschränkenden Voraussetzung, sondern ganz allgemein, welches auch immer der Werth von α sein mag. Denn wenn wir, wie es im Haupttexte geschehen, AC und CD, Fig. 6, einmal als die positiven Schenkel der Abscissen- und Ordinatenaxe, das anderemal als die positiven Schenkel der Ordinaten- und Abscissenaxe annehmen, dann auf dem Kreise irgend einen Punkt B (E, G oder K) wählen, so sind offenbar Abscisse und Ordinate dieses Punktes für das eine Axenpaar gleich der Ordinate und Abscisse dieses Punktes für das andere Axenpaar, also, wenn wir die Coordinaten des Punktes B (E, G oder K) für das erste Axenpaar mit x und y, für das andere Axenpaar mit x' und y' bezeichnen,

$$x' = y \text{ und } y' = x.$$

Weiter wird man sich noch leicht überzeugen, daß, wenn wir die Maßzahl des zwischen A und B (E, G oder K) fallenden Bogens, also auch des zu demselben gehörigen Centriwinkels, für den Anfangspunkt A mit α bezeichnen, die Maßzahl des zwischen D und B (E, G oder K) fallenden Bogens, beziehungsweise auch des zu diesem Bogen gehörigen Centriwinkels, für den Anfangspunkt D, in welchem der vier Quadranten auch immer der Punkt B (E, G oder K) liegen mag, allemal durch $90^0 - \alpha$ ausgedrückt wird. So ist z. B. der Bogen AE positiv und $> 90^0$, mithin die Differenz $90^0 - \alpha$ negativ. Anderseits ist aber auch, wenn wir CD als positiven Schenkel der Abscissenaxe, CA als positiven Schenkel der Ordinatenaxe betrachten, ein in D beginnender Bogen nur dann als positiv zu betrachten, wenn er sich in der Richtung DBA erstreckt, während ein von D aus in entgegengesetzter Richtung aufgetragener Bogen als negativ zu betrachten ist. Mithin ist Bogen DE $= -(AE - 90^0) = -(\alpha - 90^0) = 90^0 - \alpha$.

Demnach ist

$$\sin(90^0 - \alpha) = \frac{y'}{r} = \frac{x}{r} = \cos\alpha,$$

$$\text{tang}(90^0 - \alpha) = \frac{y'}{x'} = \frac{x}{y} = \text{cotg}\,\alpha,$$

$$\sec(90^0 - \alpha) = \frac{r}{x'} = \frac{r}{y} = \text{cosec}\,\alpha.$$

*§. 15. Lehrsatz.

Zu den obigen Gleichungen fügen wir noch die folgenden minder wichtigen Gleichungen:

$$\sin(90^0 + \alpha) = +\cos\alpha, \quad \cos(90^0 + \alpha) = -\sin\alpha,$$

$$\text{tang}(90^0 + \alpha) = -\text{cotg}\,\alpha, \ \text{cotg}(90^0 + \alpha) = -\text{tang}\,\alpha.$$

Beweis. Nach §. 13 ist der Sinus eines stumpfen Winkels gleich dem Sinus, der Cosinus, die Tangente oder Cotangente aber gleich dem negativen Cosinus, der negativen Tangente oder Cotangente seines spitzen Nebenwinkels. Nun ist der Nebenwinkel von $90^0 + \alpha$ offenbar $90^0 - \alpha$, folglich

$$\sin(90^0 + \alpha) = +\sin\ (90^0 - \alpha) = +\cos\alpha$$

$$\cos(90^0 + \alpha) = -\cos\ (90^0 - \alpha) = -\sin\alpha$$

$$\text{tang}(90^0 + \alpha) = -\text{tang}(90^0 - \alpha) = -\text{cotg}\,\alpha$$

$$\text{cotg}(90^0 + \alpha) = -\text{cotg}(90^0 - \alpha) = -\text{tang}\,\alpha.$$

Die so eben unter der Voraussetzung, daß α positiv und $< 90^0$ ist, erwiesenen Gleichungen gelten jedoch auch ganz allgemein, was immer α bezeichnen möge, wie man sich leicht überzeugt, wenn man in den in der Anmerkung zu dem vorigen §. ganz allgemein erwiesenen Gleichungen $-\alpha$ statt α, also $+\alpha$ statt $-\alpha$ schreibt. Man erhält so z. B. $\sin\ (90^0 + \alpha) = \sin\ (90^0 - (-\alpha)) = \cos -\alpha = +\cos\alpha$ u. s. w.

*§. 16. Lehrsatz.

Ueber das Verhältniß, welches zwischen der Größe des Sinus, der Tangente und des Bogens innerhalb des ersten Quadranten stattfindet, heben wir noch folgende Sätze hervor:

1) Der Sinus ist allemal kleiner, die Tangente größer als das Verhältniß des Bogens zum Radius.
2) Der Sinus wächst in schwächerem, die Tangente in stärkerem Verhältnisse als der Bogen.
3) Bei kleinen Winkeln kann sowohl der Sinus wie auch die Tangente annähernd durch das Verhältniß des Bogens zum Radius ersetzt werden.

Beweis. 1. Der gegebene Winkel sei ACB, Fig. 7, der zugehörige Bogen AB, der Sinus $\frac{BD}{r}$, die Tangente $\frac{AE}{r}$; dann ist zu zeigen, daß

$$\frac{BD}{r} < \frac{AB}{r} < \frac{AE}{r}$$

oder BD < AB < AE ist. Verlängern wir die Linie BD, bis sie den Kreis zum zweiten Male in F schneidet und ziehen wir durch B und F Tangenten, welche den verlängerten Radius AC, wie leicht zu sehen, in dem nämlichen Punkte G schneiden, so ist BD = DF und AE = BG = FG. Da nun die gerade Linie BF < der Bogen BF ist, so ist auch BD < der Bogen AB,

und da nach einem bekannten Satze der Planimetrie (§. 68) BG + FG > der Bogen BF ist, so ist folglich auch AE > der Bogen AB.

2. Wenn wir irgend einen Bogen AB wiederholt = BH, HK u. s. w. auftragen, von B, H und K auf AC die Lote BD, HL und KM fällen, ferner die Sehnen AB, BH und HK und die Linien BN und HO || AC ziehen, so ist Peripheriewinkel ABH < 180^0, daher W. ABD + NBH < 90^0, und da W. ABD + BAD = 90^0 ist, so ist folglich W. BAD > NBH. In den beiden rechtwinkligen Dreiecken ABD und BHN sind aber die Hypotenusen AB und BH gleich, und da, wie bewiesen, W. BAD > NBH ist, so muß auch BD > HN sein. Ebenso wird gezeigt, daß HN > KO ist. Während also die Bogen um gleiche Stücke wachsen, nehmen (AC als positiver Schenkel der Abscissenaxe betrachtet) die Ordinaten und damit denn auch die Sinus nicht um gleiche, sondern um immer kleiner werdende Werthe zu.

Verlängern wir die Radien CB, CH, CK . . ., bis sie die durch A gezogene Tangente in E, P, R . . . durchschneiden, so sind $\frac{AE}{r}$, $\frac{AP}{r}$, $\frac{AR}{r}$ . . . die zu den Winkeln ACB, ACH, ACK . . . gehörenden trigonometrischen Tangenten. Brüche von gleichen Nennern verhalten sich wie ihre Zähler; wir brauchen, um das Wachsthum der Tangenten zu verfolgen, also nur die Linien AE, AP, AR mit einander zu vergleichen. Da W. ACE = ECP = PCR ist, so verhält sich nach einem bekannten Satze der Planimetrie

$$AE : EP = AC : CP$$

und

$$EP : PR = CE : CR.$$

Da nun CP > AC und CR > CE ist, so ist folglich PR > EP > AE. Es nimmt daher die Tangente in immer stärkerem Verhältnisse zu, wenn der Bogen um gleiche Stücke wächst.

3. Bezeichnen wir der Kürze wegen den W. ACB mit α, den Radius AC wie oben mit r, den Bogen AB mit b, die Ordinate BD mit y, die Abscisse CD mit x, die geometrische Tangente AE mit t, so verhält sich wegen Aehnlichkeit der Dreiecke CBD und CEA

$$y : t = x : r.$$

In dem Dreiecke CBD ist aber x > r — y, mithin ist der Bruch

$$\frac{y}{t} > \frac{r-y}{r} \text{ oder } \frac{y}{t} > 1 - \frac{y}{r}, \text{ also } 1 - \frac{y}{t} < \frac{y}{r},$$

und da nach Nr. 1 y < b, so ist um so mehr

$$1 - \frac{y}{t} < \frac{b}{r}.$$

Wenn nun der Bogen b in dem Radius r m mal (tausend oder millionenmal) enthalten ist, so unterscheidet sich der Bruch $\frac{y}{t}$ von der Einheit um weniger als $\frac{1}{m}$ (ein Tausendtel oder Milliontel). Wir dürfen daher bei sehr kleinen Winkeln den Bruch $\frac{y}{t}$ annähernd = 1, also y = t und damit denn auch $\frac{y}{r} = \frac{t}{r}$ d. h. sin α = tang α und, da b zwischen y und t liegt, beide Werthe auch = $\frac{b}{r}$ setzen.

Bemerkung.

Sind wir durch die Entwicklungen des voraufgehenden Abschnitts über die größten und kleinsten Werthe aufgeklärt worden, welche die trigonometrischen Functionen überhaupt annehmen können, haben uns die §§. 13 und 14 gezeigt, wie die trigonometrischen Functionen sämmtlicher Winkel sich auf die des ersten Quadranten und innerhalb dieses wieder auf die der ersten Hälfte desselben zurückführen lassen, so erübrigt es nun noch zu zeigen, wie sich die trigonometrischen Functionen dieser Winkel berechnen lassen, um von den so gefundenen Werthen in dem dann folgenden Abschnitte sofort Anwendung machen zu können. Eine solche Berechnung muß sich nothwendig an eine geometrische Construction anschließen. Construiren können wir aber unter den regelmäßigen Figuren zunächst das gleichseitige Dreieck, das Quadrat, das regelmäßige Zehneck. Diese Constructionen setzen uns in den Stand, die im folgenden §. behandelte Aufgabe zu lösen.

B. Von den Werthen der trigonometrischen Functionen im besonderen.

a) Abhängigkeit der sämmtlichen trigonometrischen Functionen von einer einzigen.

§. 17. Aufgabe.

Die Sinus der Winkel von 30^0, 45^0 und 18^0 zu berechnen.

Auflösung. 1) $\sin 30^0 = \frac{1}{2} = \cos 60^0.$

2) $\sin 45^0 = \sqrt{\frac{1}{2}} = \cos 45^0.$

3) $\sin 18^0 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} = \cos 72^0.$

Beweis.

1. Um einen Winkel von 30^0 zu erhalten, zeichnen wir ein gleichseitiges Dreieck ABC, Fig. 8, und ziehen $CD \perp AB$. Dann ist W. $ACB = 60^0$, folglich $ACD = 30^0$; ferner ist $AD = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} AC$. Bezeichnen wir also AC mit a, so ist $AD = \frac{1}{2} a$ und

$$\sin 30^0 = \frac{\frac{1}{2}a}{a} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

2. Um einen Winkel von 45^0 zu erhalten, zeichnen wir ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck ABC, Fig. 9, dann ist sowohl W. C wie $A = 45^0$. Nennen wir die gleichen Catheten b, die Hypotenuse a, so ist nach dem pythagoräischen Lehrsatze

$$a^2 = 2b^2, \text{ also } b^2 = \frac{1}{2}a^2, \text{ mithin } b = a\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Hieraus folgt $\sin 45^0 = \frac{b}{a} = \frac{a\sqrt{\frac{1}{2}}}{a} = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0{,}707107.$

3. Ist C der Mittelpunkt und AC der Radius eines Kreises, Fig. 10, so erhalten wir die Seite AB des in den Kreis zu beschreibenden regelmäßigen Zehnecks, wenn wir den Radius AC im Punkte E nach stetiger Proportion theilen, so daß sich also AC : CE = CE : AE verhält und dann den größeren Abschnitt CE = AB als Sehne in den Kreis eintragen. Verbinden wir nämlich noch B mit C und E, so haben die beiden Dreiecke ABC und AEB den Winkel A gemein; außerdem verhält sich, da CE = AB ist, AC : AB = AB : AE. Hieraus folgt die Aehnlichkeit der beiden Dreiecke ACB und ABE, da sie in einem Winkel und dem Verhältnisse der einschließenden Seiten übereinstimmen. Demnach ist Dreieck ABE gleichschenklig, mithin AB = BE = CE und W. ABE = ACB = CBE, also W. A = ABC = 2ACB. Bezeichnen wir nun der Kürze wegen W. ACB mit α, so erhalten wir, da die drei Winkel ACB + CAB + CBA als Winkel eines Dreiecks 180^0 betragen, die Gleichung

$$\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180^0 \text{ oder } 5\alpha = 180^0,$$

woraus $\alpha = 36^0$ folgt.

Der Bogen AB ist mithin der zehnte Theil der Kreislinie, also Sehne AB die Seite eines regelmäßigen Zehnecks.

Ziehen wir nun noch CD $\perp$ AB, so ist W. ACD $= 18^0$ und $\sin 18^0 = \frac{AD}{AC}$. Es bedarf also nur noch der Berechnung von AD. Bezeichnen wir der Kürze wegen AC mit r, AB = CE mit x, also AE mit r — x, so gilt nach dem Obigen die Proportion

$$r : x = x : r - x.$$

Aus dieser Proportion folgt, da das Product der innern Glieder gleich dem der äußern ist, weiter

$$x^2 = r(r - x) = r^2 - rx \text{ oder } x^2 + rx = r^2.$$

Lösen wir diese quadratische Gleichung auf bekannte Weise auf, so erhalten wir $x = -\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{5}{4}r^2} = \frac{r(-1 + \sqrt{5})}{2}$, wo vor der Wurzel nur das Zeichen (+) steht, weil x als Maßzahl einer Linie nicht negativ sein kann. Hiernach ist

$$\sin 18^0 = \frac{\frac{1}{2}x}{r} = \frac{r(-1 + \sqrt{5})}{4r} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} = 0{,}309017.$$

§. 18. Lehrsatz.

Ist der Sinus eines Winkels bekannt, so läßt sich auch leicht der Cosinus desselben finden, denn

$$\mathbf{\sin \alpha^2 + \cos \alpha^2 = 1.}$$

Beweis. In §. 5 haben wir gesehen, daß, welche Größe auch der Winkel α haben mag, doch für den Radius r, die Abscisse x und die Ordinate y die Gleichung des pythagoräischen Lehrsatzes

$$y^2 + x^2 = r^2$$

ihre Giltigkeit behält. Dividiren wir diese Gleichung durch r^2, so verwandelt sich dieselbe in

$$\frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = 1.$$

Nun ist aber nach §. 7

$$\frac{y}{r} = \sin\alpha, \text{ also } \frac{y^2}{r^2} = \sin\alpha^2 \text{*)}$$

und

$$\frac{x}{r} = \cos\alpha, \text{ also } \frac{x^2}{r^2} = \cos\alpha^2.$$

Setzen wir diese Werthe in die vorhergehende Gleichung ein, so erhalten wir

$$\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2 = 1.$$

§. 19. Zusatz.

Aus der eben aufgestellten Gleichung folgt

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin\alpha^2} \text{ und } \sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos\alpha^2},$$

wo sich das doppelte Vorzeichen ($\pm$) vor der Wurzel darauf bezieht, daß in den verschiedenen Quadranten der Sinus wie der Cosinus sowohl positive wie negative Werthe annehmen können.

Mit Hilfe der ersten dieser Gleichungen lassen sich von den oben (§. 17) angeführten Winkeln die Cosinus berechnen, und zwar ist:

$$\cos 30^0 = \sqrt{1 - \sin 30^{0\,2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0{,}866025.$$

$$\cos 18^0 = \sqrt{1 - \sin 18^{0\,2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{6-2\sqrt{5}}{16}}$$

$$= \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = 0{,}951057.$$

§. 20. Lehrsatz.

Ist Sinus und Cosinus eines Winkels gegeben, so ist auch die Tangente und Cotangente desselben leicht zu bestimmen, denn

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tang}\alpha \text{ und } \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{cotg}\alpha.$$

Beweis. Nach §. 7 ist $\sin\alpha = \frac{y}{r}$, $\cos\alpha = \frac{x}{r}$. Dividiren wir diese beiden Gleichungen durch einander, so erhalten wir (da Brüche mit gleichen Nennern durch einander dividirt werden, indem man ihre Zähler durch einander dividirt)

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y}{x} = \operatorname{tang}\alpha$$

und

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{x}{y} = \operatorname{cotg}\alpha.$$

So ist

1) $\operatorname{tang} 30^0 = \frac{\sin 30^0}{\cos 30^0} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = 0{,}577350.$

$\operatorname{cotg} 30^0 = \frac{\cos 30^0}{\sin 30^0} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} = 1{,}732050.$

---

*) $\sin\alpha^2$ ist der abgekürzte Ausdruck für $(\sin\alpha)^2$ und steht also für $\sin\alpha \cdot \sin\alpha$.

2) $\text{tang } 45^0 = \frac{\sin 45^0}{\cos 45^0} = 1 = \text{cotg } 45^0$, ein Resultat, welches auch unmittelbar aus Fig. 9 abgelesen werden kann.

3) $$\text{tang } 18^0 = \frac{\sin 18^0}{\cos 18^0} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} : \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$$
$$= \sqrt{\frac{6 - 2\sqrt{5}}{10 + 2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}}}.$$

Schaffen wir in letzterem Ausdruck die Wurzel aus dem Nenner weg, indem wir Zähler und Nenner mit $5 - \sqrt{5}$ multipliciren, so erhalten wir

$$\text{tang } 18^0 = \sqrt{\frac{(3 - \sqrt{5})\,(5 - \sqrt{5})}{(5 + \sqrt{5})\,(5 - \sqrt{5})}} = \sqrt{\frac{20 - 8\sqrt{5}}{20}}$$
$$= \sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}} = 0{,}324920.$$

$$\text{cotg } 18^0 = \frac{\cos 18^0}{\sin 18^0} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{-1 + \sqrt{5}} = \sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{6 - 2\sqrt{5}}}$$
$$= \sqrt{\frac{(5 + \sqrt{5})\,(3 + \sqrt{5})}{(3 - \sqrt{5})\,(3 + \sqrt{5})}} = \sqrt{\frac{20 + 8\sqrt{5}}{4}}$$
$$= \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} = 3{,}077684.$$

§. 21. Zusatz.

Aus den im vorigen §. aufgestellten Gleichungen folgt weiter:

$$\sin \alpha = \cos \alpha \,.\, \text{tang } \alpha \text{ und } \cos \alpha = \sin \alpha \,.\, \text{cotg } \alpha.$$

§. 22. Lehrsatz.

Zwischen der Tangente und Cotangente desselben Winkels findet folgende Beziehung statt:

$$\text{tang } \alpha \,.\, \text{cotg } \alpha = 1.$$

Beweis. Nach §. 7 ist $\text{tang } \alpha = \frac{y}{x}$, $\text{cotg } \alpha = \frac{x}{y}$,

also
$$\text{tang } \alpha \,.\, \text{cotg } \alpha = \frac{y \,.\, x}{x \,.\, y} = 1.$$

Von geringerer Bedeutung sind die Beziehungen, welche zwischen den bereits erörterten und den übrigen Functionen eines und desselben Winkels stattfinden und welche wir nur noch der Vollständigkeit wegen mit anführen.

*§. 23. Lehrsatz.

$$1 + \text{tang } \alpha^2 = \sec \alpha^2,\; 1 + \text{cotg } \alpha^2 = \text{cosec } \alpha^2.$$

Beweis. Denn wenn wir die Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ einmal durch x^2 und zweitens durch y^2 dividiren, so erhalten wir

$$1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{r^2}{x^2} \text{ und } \frac{x^2}{y^2} + 1 = \frac{r^2}{y^2}.$$

Nun ist aber nach §. 7 $\frac{y}{x} = \text{tang } \alpha$, $\frac{x}{y} = \text{cotg } \alpha$, $\frac{r}{x} = \sec \alpha$ und $\frac{r}{y} = \text{cosec } \alpha$.

Hiernach verwandeln sich die obigen Gleichungen in:

$$1 + \text{tang } \alpha^2 = \sec \alpha^2 \text{ und } 1 + \text{cotg } \alpha^2 = \text{cosec } \alpha^2.$$

Zur Veranschaulichung dieser Gleichungen kann Fig. 6 dienen. In dem rechtwinkligen Dreiecke ACN ist nämlich nach dem pythagoräischen Lehrsatze

$$AC^2 + AN^2 = CN^2,$$

woraus vermittelst Division durch r^2

$$\frac{AC^2}{r^2} + \frac{AN^2}{r^2} = \frac{CN^2}{r^2}$$

oder, da $AC = r, \frac{AN}{r} = \text{tang } \alpha$ und $\frac{CN}{r} = \sec \alpha$

ist, $1 + \text{tang } \alpha^2 = \sec \alpha^2$ folgt.

Ferner ist in dem rechtwinkligen Dreiecke CDS $CD^2 + DS^2 = CS^2$, mithin

$$\frac{CD^2}{r^2} + \frac{DS^2}{r^2} = \frac{CS^2}{r^2},$$

oder, da $CD = r, \frac{DS}{r} = \text{cotg } \alpha$ und $\frac{CS}{r} = \text{cosec } \alpha$

ist, $1 + \text{cotg } \alpha^2 = \text{cosec } \alpha^2.$

*§. 24. Lehrsatz.

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \text{ und } \text{cosec } \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}.$$

Beweis. Nach §. 7 ist $\frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{x:r} = \frac{r}{x} = \sec \alpha$

und $\frac{1}{\sin \alpha} = \frac{1}{y:r} = \frac{r}{y} = \text{cosec } \alpha.$

Da zufolge dieser Gleichungen sich die Secante und Cosecante sehr einfach durch den Cosinus und Sinus ersetzen lassen, so pflegen dieselben in den trigonometrischen Tafeln gänzlich zu fehlen. Aus demselben Grunde könnten auch die Cotangenten übergangen werden, da $\text{cotg } \alpha = \frac{1}{\text{tang } \alpha}$ ist. Daß die Tafeln auch die Cotangenten enthalten, hat darin seinen Grund, daß die Tangente eines Winkels zugleich Cotangente des Complementes ist.

*§. 25. Zusatz.

Wenn wir in den Gleichungen des §. 23

$$1 + \text{tang } \alpha^2 = \sec \alpha^2 \text{ und } 1 + \text{cotg } \alpha^2 = \text{cosec } \alpha^2$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \text{ und } \text{cosec } \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$$

setzen, so verwandeln sich dieselben in

$$1 + \text{tang } \alpha^2 = \frac{1}{\cos \alpha^2} \text{ und } 1 + \text{cotg } \alpha^2 = \frac{1}{\sin \alpha^2}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt weiter

$$\cos \alpha^2 \, (1 + \text{tang } \alpha^2) = 1 \text{ und } \sin \alpha^2 \, (1 + \text{cotg } \alpha^2) = 1$$

und hieraus $\cos \alpha^2 = \frac{1}{1 + \text{tang } \alpha^2}$ und $\sin \alpha^2 = \frac{1}{1 + \text{cotg } \alpha^2}$,

also $\cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tang } \alpha^2}}$ und $\sin \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \text{cotg } \alpha^2}}.$

Diese Gleichungen lehren uns den Cosinus finden, wenn die Tangente, und den Sinus, wenn die Cotangente gegeben ist.

§. 26. Zusatz.

Ueberhaupt setzen uns, wenn von den vier trigonometrischen Functionen eines Winkels, Sinus, Cosinus, Tangente und Cotangente, eine gegeben ist, die in den §§. 18 bis 25 enthaltenen Entwickelungen in den Stand, die drei übrigen mit Leichtigkeit auszudrücken, wie folgende Zusammenstellung zeigt.

Gegeben.	Gesucht.	
1) $\sin\alpha$	$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin\alpha^2}$	(§. 19.)
	$\operatorname{tang}\alpha = \dfrac{\pm\sin\alpha}{\sqrt{1 - \sin\alpha^2}}$	(§. 20 und §. 19.)
	$\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{\pm\sqrt{1 - \sin\alpha^2}}{\sin\alpha}$	(§. 20 und §. 19.)
2) $\cos\alpha$	$\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos\alpha^2}$	(§. 19.)
	$\operatorname{tang}\alpha = \pm\dfrac{\sqrt{1 - \cos\alpha^2}}{\cos\alpha}$	(§. 20 und §. 19.)
	$\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{\pm\cos\alpha}{\sqrt{1 - \cos\alpha^2}}$	(§. 20 und §. 19.)
3) $\operatorname{tang}\alpha$	$\sin\alpha = \dfrac{\pm\operatorname{tang}\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}\alpha^2}}$	(§. 21 und §. 25.)
	$\cos\alpha = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}\alpha^2}}$	(§. 25.)
	$\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tang}\alpha}$	(§. 22.)
4) $\operatorname{cotg}\alpha$	$\sin\alpha = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{1 + \operatorname{cotg}\alpha^2}}$	(§. 25.)
	$\cos\alpha = \dfrac{\pm\operatorname{cotg}\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{cotg}\alpha^2}}$	(§. 21 und §. 25.)
	$\operatorname{tang}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{cotg}\alpha}$	(§. 22.)

Bemerkung.

Um von den bereits bekannten trigonometrischen Functionen der Winkel von 30^0, 45^0 und 18^0 weiter fortzuschreiten, bilden wir aus je zweien dieser Winkel durch Addition oder Subtraction einen dritten und gelangen damit zu der im folgenden §. behandelten Aufgabe.

b) Von den trigonometrischen Functionen der Summe und Differenz zweier Winkel.

§. 27. Aufgabe.

Aus dem Sinus und Cosinus zweier spitzen Winkel α und β den Sinus und Cosinus ihrer Summe zu berechnen, vorausgesetzt, daß diese Summe $\alpha + \beta < 90^0$ ist.

Auflösung.

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \,.\, \cos\beta + \cos\alpha \,.\, \sin\beta$$

und

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \,.\, \cos\beta - \sin\alpha \,.\, \sin\beta.$$

Beweis. Es sei in Fig. 11

W. $BCD = \alpha$, $ACB = \beta$, also $ACD = \alpha + \beta$.

Um bei den zu vergleichenden Brüchen denselben Nenner zu erhalten, beschreiben wir mit einem beliebigen Radius r um C einen Kreis, welcher die Schenkel in A, B und D schneiden möge und fällen von A und B auf CD und CB die Lote AE, AF und BG. Dann ist

$$1)\ \sin\alpha = \frac{BG}{r},\ \cos\alpha = \frac{CG}{r}$$

$$2)\ \sin\beta = \frac{AF}{r},\ \cos\beta = \frac{CF}{r}.$$

Um ferner mit Hilfe dieser als bekannt zu betrachtenden Verhältnisse zunächst

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{AE}{r}$$

zu bestimmen, zerlegen wir AE, indem wir von F aus auf AE das Lot FK fällen; außerdem ziehen wir, um EK in ein Dreieck zu bringen, $FH \perp CD$.

Nun ist 3) $\mathbf{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{AE}{r} = \frac{AK + FH}{r} = \mathbf{\frac{AK}{r} + \frac{FH}{r}}.$

Wie leicht zu sehen, ist $\triangle CFH \sim CBG$, folglich verhält sich

$$\mathbf{FH : BG = CF : CB},$$

oder wenn wir sämmtliche Glieder der Proportion durch r dividiren, was geschehen darf, da der Werth eines Bruches $\left(\frac{FH}{BG}\text{ wie auch }\frac{CF}{CB}\right)$ unverändert bleibt, wenn wir Zähler und Nenner durch ein und dieselbe Zahl (die Maßzahl von r) dividiren,

$$\frac{FH}{r} : \frac{BG}{r} = \frac{CF}{r} : \frac{CB}{r}$$

oder $$\mathbf{\frac{FH}{r} : \sin\alpha = \cos\beta : 1},$$

woraus sich, da in jeder Proportion das Product der äußern Glieder gleich dem der innern ist, 4) $\mathbf{\frac{FH}{r} = \sin\alpha \,.\, \cos\beta}$ ergibt.

Weiter ist $\frac{AK}{r}$ zu bestimmen. Zu diesem Zwecke vergleichen wir $\triangle AKF$ und CGB. Zunächst ist W. $K = G = 90^0$; ferner ist W. $KAF + KFA = 90^0$ und $KFA + KFC = 90^0$, mithin $KAF = KFC$ und, da $KFC = \alpha$ ist als Wechselwinkel, auch $KAF = \alpha$. Folglich ist $\triangle AKF \sim CGB$, mithin verhält sich

$$\mathbf{AK : CG = AF : CB},$$

also auch $$\frac{AK}{r} : \frac{CG}{r} = \frac{AF}{r} : \frac{BC}{r}$$

oder $$\mathbf{\frac{AK}{r} : \cos\alpha = \sin\beta : 1},$$

woraus 5) $\mathbf{\frac{AK}{r} = \cos\alpha\ \sin\beta}$ folgt.

Setzen wir die in (4) und (5) gefundenen Werthe in Gleichung (3) ein, so erhalten wir

6) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$.

Ferner ist 7) $\cos(\alpha + \beta) = \frac{CE}{r} = \frac{CH - KF}{r} = \frac{CH}{r} - \frac{KF}{r}$.

Zur Bestimmung von $\frac{CH}{r}$ folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke CFH und CBG die Proportion

$$CH : CG = CF : CB,$$

also auch $$\frac{CH}{r} : \frac{CG}{r} = \frac{CF}{r} : \frac{CB}{r},$$

oder $$\frac{CH}{r} : \cos\alpha = \cos\beta : 1,$$

mithin ist 8) $$\frac{CH}{r} = \cos\alpha . \cos\beta.$$

Wie bereits bewiesen, ist $\triangle AKF \sim CGB$, also verhält sich

$$KF : BG = AF : CB,$$

mithin auch $$\frac{KF}{r} : \frac{BG}{r} = \frac{AF}{r} : \frac{CB}{r},$$

oder $$\frac{KF}{r} : \sin\alpha = \sin\beta : 1,$$

also ist 9) $$\frac{KF}{r} = \sin\alpha . \sin\beta.$$

Aus den Gleichungen (8) und (9) folgt aber schließlich in Verbindung mit (7)

10) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha . \cos\beta - \sin\alpha . \sin\beta$.

§. 28. Zusatz.

Die beiden Gleichungen des vorhergehenden §. sind auch dann noch richtig, wenn die Summe der beiden spitzen Winkel α und β = oder $> 90^0$ ist.

Beweis. Wenn zunächst $\alpha + \beta = 90^0$ ist, so ist

$$\sin(\alpha + \beta) = 1 \text{ und } \cos(\alpha + \beta) = 0,$$

ferner nach §. 14 $\sin\beta = \cos\alpha$ und $\cos\beta = \sin\alpha$, folglich
$\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \sin\alpha^2 + \cos\alpha^2 = 1$ (§. 18) $= \sin(\alpha + \beta)$ und
$\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \cos\alpha\sin\alpha - \sin\alpha\cos\alpha = 0 = \cos(\alpha + \beta)$.

Um ferner zu zeigen, daß die Gleichungen des vorhergehenden §. auch dann noch giltig bleiben, wenn $\alpha + \beta > 90^0$ ist, setzen wir

$$\alpha = 90^0 - \gamma \text{ und } \beta = 90^0 - \delta,$$

also $$\alpha + \beta = 180^0 - (\gamma + \delta).$$

Dann ist nach §. 14 1) $\sin\alpha = \cos\gamma$, $\cos\alpha = \sin\gamma$,

2) $\sin\beta = \cos\delta$, $\cos\beta = \sin\delta$,

ferner nach §. 13

3) $\sin(\alpha + \beta) = \sin(180^0 - (\gamma + \delta)) = \sin(\gamma + \delta)$.

Nun ist aber, da $\gamma + \delta$ offenbar $< 90^0$ ist, nach dem vorhergehenden §.

$$4)\quad \sin(\gamma + \delta) = \sin\gamma\cos\delta + \cos\gamma\sin\delta,$$

folglich vermöge der Gleichungen (1), (2) und (3)

$$5)\quad \sin(\alpha + \beta) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta$$
$$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Ferner ist nach §. 13

$$6)\quad \cos(\alpha + \beta) = \cos(180^0 - (\gamma + \delta)) = -\cos(\gamma + \delta).$$

Nach dem vorhergehenden §. ist

$$\cos(\gamma + \delta) = \cos\gamma\cos\delta - \sin\gamma\sin\delta,$$

also $\quad 7)\quad -\cos(\gamma + \delta) = \sin\gamma\sin\delta - \cos\gamma\cos\delta$

und folglich vermöge (1), (2) und (6)

$$8)\quad \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Wir haben uns in den beiden vorstehenden §§. darauf beschränkt, die beiden wichtigen Gleichungen $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
und $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
für den Fall zu erweisen, daß α und β spitze Winkel sind. Jene Gleichungen gelten jedoch ganz allgemein, welche Werthe auch immer die Winkel α und β haben mögen. Wir bemerken zunächst, daß diese Gleichungen richtig bleiben, wenn wir einen der gegebenen Winkel z. B. $\beta = 0$ setzen. Denn da

$$\sin 0 = 0 \text{ und } \cos 0 = 1$$

ist, so gehen für diese Annahme, wie leicht zu sehen, jene Gleichungen in die identischen Gleichungen $\sin\alpha = \sin\alpha$ und $\cos\alpha = \cos\alpha$
über. — Wir wollen nun weiter zeigen, daß die beiden obigen Gleichungen richtig bleiben, wenn einer der beiden gegebenen Winkel z. B. $\beta < 90^0$, aber der andere $\alpha \overline{\gtrless} 90^0$ ist. Wir nehmen zuerst an, daß $\alpha < 180^0$ ist, und setzen

$$\alpha = 90^0 + \gamma,$$

wo also γ irgend einen Winkel, welcher $< 90^0$ ist, bezeichnet. Dann ist nach §. 15

$$\sin\alpha = \cos\gamma \text{ und } \cos\alpha = -\sin\gamma,$$

ferner $\quad \sin(\alpha + \beta) = \sin(90^0 + \gamma + \beta) = \cos(\gamma + \beta).$

Da γ und β als spitz vorausgesetzt sind, so können wir zufolge des im Haupttexte geführten Beweises auch setzen:

$$\cos(\gamma + \beta) = \cos\gamma\cos\beta - \sin\gamma\sin\beta,$$

d. h. $\quad \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$

Eben so finden wir $\cos(\alpha + \beta) = \cos(90^0 + \gamma + \beta) = -\sin(\gamma + \beta)$

$$= -\sin\gamma\cos\beta - \cos\gamma\sin\beta$$
$$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Es sei ferner $\alpha \overline{\gtrless} 180^0$, aber $< 270^0$; setzen wir dann $\alpha = 90^0 + \gamma$, wo also $\gamma < 180^0$ ist, so können wir vermöge des eben geführten Beweises und ganz durch die nämliche Entwickelung die Richtigkeit der zu erweisenden Gleichungen darthun. Auf diesem Wege fortfahrend überzeugen wir uns, daß die obigen Gleichungen richtig bleiben, welchen Werth auch immer α haben mag. Nachdem wir dieses gezeigt haben, verfahren wir jetzt ganz eben so in Hinsicht des Winkels β, indem wir zunächst $\beta < 180^0$, hierauf $\beta < 270^0$ u. s. w. annehmen nnd dann dieselben Entwickelungen wie oben vornehmen, wobei wegen des schon geführten Beweises α jeden beliebigen Werth repräsentiren kann. Es bleiben daher die obigen Gleichungen immer richtig, wie groß wir auch α und β annehmen.

Wir haben uns bisher in Hinsicht dieser Winkel auf positive Werthe beschränkt; die obigen Gleichungen bleiben aber auch dann noch richtig, wenn α und β negative Werthe erhalten. Um dies zu zeigen, nehmen wir zunächst α als positiv und nur β als negativ

an, bezeichnen mit $\varkappa$ irgend ein Vielfaches der Peripherie, welches größer ist als der absolute Werth von β, so daß also $\varkappa + \beta$ positiv ist; dann ist nach §. 12 (Gleichung 13 und 14) und zufolge des für positive Winkel bereits Erwiesenen

$$\sin(\varkappa + \beta) = \sin\beta,\ \cos(\varkappa + \beta) = \cos\beta,$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\varkappa + \alpha + \beta) = \sin(\alpha + (\varkappa + \beta))$$
$$= \sin\alpha\cos(\varkappa + \beta) + \cos\alpha\sin(\varkappa + \beta)$$
$$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

und

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\varkappa + \alpha + \beta) = \cos(\alpha + (\varkappa + \beta))$$
$$= \cos\alpha\cos(\varkappa + \beta) - \sin\alpha\sin(\varkappa + \beta)$$
$$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Ist endlich nicht bloß β, sondern auch α negativ, so läßt sich, wie leicht zu sehen, ganz in der nämlichen Weise die Richtigkeit unserer Gleichungen darthun, so daß diese also ganz allgemein gelten, welche positiven oder negativen Werthe auch immer α und β repräsentiren mögen.

Durch die vorstehende Entwickelung sind offenbar auch die beiden Gleichungen des folgenden §. als richtig erwiesen, und es bedürfte hiernach einer besonderen Herleitung derselben aus der Figur eigentlich nicht. Wir haben jedoch diese um größerer Anschaulichkeit willen und mit Berücksichtigung des Bedürfnisses der Anfänger beigefügt.

§. 29. Aufgabe.

Wenn die Sinus und Cosinus zweier spitzen Winkel α und β gegeben sind, den Sinus und Cosinus ihrer Differenz zu berechnen.

Aufl.
$$\mathbf{\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}$$
$$\mathbf{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.}$$

Beweis. Es sei in Fig. 12

W. BCD $= \alpha$, BCA $= \beta$, also ACD $= \alpha - \beta$.

Wir beschreiben auch hier wieder mit einem beliebigen Radius r um den Scheitelpunkt C einen Kreis, welcher die Schenkel in B, A und D schneidet, fällen, um $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ zu erhalten, von B auf CD das Lot BG, um $\sin\beta$ und $\cos\beta$ zu erhalten, von A (d. h. dem Punkte, in welchem der Kreis den nicht gemeinschaftlichen Schenkel der Winkel α und β schneidet) auf BC das Lot AF und ziehen, um $\sin(\alpha - \beta)$ und $\cos(\alpha - \beta)$ zu erhalten, von A aus AE $\perp$ CD. Endlich ziehen wir, um die zuletzt gewonnenen Linien AE und CE durch andere zu ersetzen, welche sich bequem berechnen lassen, FH $\perp$ CD und AK $\perp$ FH. Dann ist

$$1)\quad \sin\alpha = \frac{BG}{r},\ \cos\alpha = \frac{CG}{r}$$

$$2)\quad \sin\beta = \frac{AF}{r},\ \cos\beta = \frac{CF}{r}$$

und

$$3)\quad \mathbf{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{AE}{r} = \frac{FH - FK}{r} = \mathbf{\frac{FH}{r} - \frac{FK}{r}}.$$

Wir haben also zunächst $\frac{FH}{r}$, sodann $\frac{FK}{r}$ zu bestimmen.

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke CFH und CBG folgt die Proportion

$$\mathbf{FH : BG = CF : CB}$$

und hieraus weiter

$$\frac{FH}{r} : \frac{BG}{r} = \frac{CF}{r} : \frac{CB}{r}$$

oder $$\frac{FH}{r} : \sin\alpha = \cos\beta : 1,$$

mithin ist $$4)\quad \frac{FH}{r} = \sin\alpha\cos\beta.$$

Weiter ist Dreieck AFK ∾ BCG, denn es ist W. K = G = 90°; ferner ist W. KFA + KFC = 90° und KFC + α = 90°, also KFA = α.

Also verhält sich $$FK : CG = AF : CB,$$

mithin auch $$\frac{FK}{r} : \frac{CG}{r} = \frac{AF}{r} : \frac{CB}{r}$$

oder $$\frac{FK}{r} : \cos\alpha = \sin\beta : 1,$$

folglich ist $$5)\quad \frac{FK}{r} = \cos\alpha\sin\beta.$$

Setzen wir die für $\frac{FH}{r}$ und $\frac{FK}{r}$ gefundenen Werthe in Gleichung (3) ein,

so erhalten wir $$6)\quad \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

Um ferner $$7)\quad \cos(\alpha - \beta) = \frac{CE}{r} = \frac{CH + AK}{r} = \frac{CH}{r} + \frac{AK}{r}$$

zu finden, haben wir $\frac{CH}{r}$ und $\frac{AK}{r}$ zu bestimmen.

Zunächst verhält sich wegen Aehnlichkeit der Dreiecke CFH und CBG
$$CH : CG = CF : CB,$$

also auch $$\frac{CH}{r} : \frac{CG}{r} = \frac{CF}{r} : \frac{CB}{r}$$

oder $$\frac{CH}{r} : \cos\alpha = \cos\beta : 1,$$

also ist $$8)\quad \frac{CH}{r} = \cos\alpha . \cos\beta.$$

Sodann folgt aus der bereits erwiesenen Aehnlichkeit der Dreiecke AFK und BCG die Proportion $AK : BG = AF : CB$

und hieraus $$\frac{AK}{r} : \frac{BG}{r} = \frac{AF}{r} : \frac{CB}{r}$$

oder $$\frac{AK}{r} : \sin\alpha = \sin\beta : 1,$$

mithin ist $$9)\quad \frac{AK}{r} = \sin\alpha . \sin\beta.$$

Aus den Gleichungen (7), (8) und (9) ergibt sich endlich
$$10)\quad \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Daß die beiden Gleichungen dieses §. nicht bloß unter der Voraussetzung, daß α und β positive spitze Winkel bezeichnen, sondern ganz allgemein gelten, ist bereits in der Anmerkung zu §. 28 dargethan, indem sin ($\alpha + \beta$) und cos ($\alpha + \beta$) in sin ($\alpha - \beta$) und cos ($\alpha - \beta$) übergehen, wenn man $-\beta$ an die Stelle von $+\beta$ schreibt.

Frage: Wie lassen sich mit Hülfe der in den §§. 27 und 29 gelösten Aufgaben die trigonometrischen Functionen folgender Winkel: 75^0, 63^0, 48^0, 12^0, 3^0 berechnen?

§. 30, a. Zusatz.

Wenn man in den beiden Formeln des §. 27 $\beta = \alpha$ setzt, so gelangt man leicht weiter zu folgenden Gleichungen:

$$1)\ \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$
$$2)\ \cos 2\alpha = \cos \alpha^2 - \sin \alpha^2$$
$$3)\ 1 + \cos 2\alpha = 2 \cos \alpha^2$$
$$4)\ 1 - \cos 2\alpha = 2 \sin \alpha^2.$$

Beweis. Denn nach dem angeführten §. ist

1) $\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

2) $\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha = \cos \alpha^2 - \sin \alpha^2$.

3) und 4) Wenn wir zu der Gleichung des §. 18 $1 = \cos \alpha^2 + \sin \alpha^2$ einmal die so eben erhaltene Gleichung (2) $\cos 2\alpha = \cos \alpha^2 - \sin \alpha^2$ addiren, das anderemal davon subtrahiren, so bekommen wir weiter

$$1 + \cos 2\alpha = 2 \cos \alpha^2$$
$$1 - \cos 2\alpha = 2 \sin \alpha^2.$$

§. 30, b. Zusatz.

Da $\alpha = 2 . \frac{1}{2}\alpha$ ist, so können wir den so eben erwiesenen Gleichungen auch folgende Form geben:

$$1)\ \sin \alpha = 2 \sin \tfrac{1}{2}\alpha \cos \tfrac{1}{2}\alpha$$
$$2)\ \cos \alpha = \cos \tfrac{1}{2}\alpha^2 - \sin \tfrac{1}{2}\alpha^2$$
$$3)\ 1 + \cos \alpha = 2 \cos \tfrac{1}{2}\alpha^2$$
$$4)\ 1 - \cos \alpha = 2 \sin \tfrac{1}{2}\alpha^2.$$

Aus den Gleichungen (3) und (4) folgt weiter

$$5)\ \cos \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$6)\ \sin \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}.$$

Wenn wir die Gleichungen (1), (3) und (4) durch einander dividiren, so erhalten wir ferner

$$7)\ \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha$$

$$8)\ \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\alpha$$

$$9)\ \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} = \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\alpha^2.$$

Wenn wir in den Gleichungen (3) und (4) $90^0 - \alpha$ statt α setzen und erwägen, daß der Cosinus eines Winkels gleich dem Sinus des Complements ist, so finden wir

noch 10) $1 + \sin \alpha = 2 \cos (45^0 - \frac{1}{2}\alpha)^2 = 2 \sin (45^0 + \frac{1}{2}\alpha)^2$

und 11) $1 - \sin \alpha = 2 \sin (45^0 - \frac{1}{2}\alpha)^2 = 2 \cos (45^0 + \frac{1}{2}\alpha)^2$,

folglich 12) $\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} = \operatorname{cotg} (45^0 - \frac{1}{2}\alpha)^2 = \operatorname{tang} (45^0 + \frac{1}{2}\alpha)^2$.

§. 31. Zusatz.

Wenn man den Winkel 3α in $2\alpha + \alpha$ zerfällt, so lassen sich mit Benutzung der Gleichungen der §§. 27 und 30, a auch leicht die beiden folgenden Gleichungen erweisen:

1) $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin \alpha^3$

und

2) $\cos 3\alpha = 4 \cos \alpha^3 - 3 \cos \alpha$.

Die Gleichung (1) des vorstehenden §. setzt uns in den Stand, folgende Aufgabe zu lösen.

§. 32. Aufgabe.

Aus $\sin 3^0$ $\sin 1^0$ abzuleiten.

Auflösung. $\sin 1^0 = 0{,}0174524$.

Beweis. Nach dem voraufgehenden §. ist

$$\sin 3^0 = 3 \sin 1^0 - 4 \sin 1^{0\,3};$$

hieraus folgt

$$\sin 1^0 = \frac{\sin 3^0}{3} + \frac{4}{3} \sin 1^{0\,3}.$$

Nach den früheren Berechnungen (§. 29) ist $\sin 3^0 = 0{,}0523359$, also

$$\frac{\sin 3^0}{3} = 0{,}0174453,$$

mithin ist $\sin 1^0 > 0{,}0174453$. Anderseits ist nach §. 16 der Sinus kleiner als das Verhältniß des Bogens zum Radius; dieses Verhältniß ist für einen Bogen von

$$1^0 = \frac{2\,r\,\pi}{360} : r = \frac{2\,\pi}{360} = \frac{6{,}2831853}{360} = 0{,}0174533.$$

Die beiden Werthe, von denen der erste kleiner, der zweite größer als $\sin 1^0$ ist, unterscheiden sich nur um 0,000008, mithin unterscheidet sich $\sin 1^0$ selbst von 0,0174453 um weniger als 0,000008. Setzen wir diese vorläufig noch unbekannte Differenz $= x$, so ist $\sin 1^0 = 0{,}0174453 + x$; also geht die oben aufgestellte Gleichung über in

$$0{,}0174453 + x = 0{,}0174453 + \frac{4}{3}(0{,}0174453 + x)^3.$$

Entwickeln wir die hier vorkommende dritte Potenz, so darf, da $x < 0{,}000008$ ist und höhere Potenzen dieses Decimalbruchs auf die hier berücksichtigte Anzahl von Decimalstellen keinen Einfluß mehr ausüben, sowohl x^2 wie x^3 vernachlässigt werden, und wir erhalten daher folgende Bestimmungsgleichung:

$$x = 0{,}0000071 + 0{,}0012173\,x,$$

woraus

$$0{,}9987826\,x = 0{,}0000071$$

oder

$$x = 0{,}0000071$$

folgt.

Demnach ist $\sin 1^0 = 0{,}0174453 + 0{,}0000071 = 0{,}0174524$.

Ist aber $\sin 1^0$ gefunden, so läßt sich weiter nach §. 19 $\cos 1^0$ und aus beiden weiter Sinus und Cosinus beliebiger Vielfachen von 1^0 ableiten.

Durch wiederholte Anwendung der Gleichungen (5) und (6) des §. 30,b läßt sich aus $\cos 1^0$ weiter $\sin 30'$ und $\cos 30'$, aus letzterem $\sin 15'$ und $\cos 15'$ ableiten. Sollten die trigonometrischen Functionen noch kleinerer Winkel, z. B. sämmtlicher Winkel von Minute zu Minute bestimmt werden, so würden wir des Sinus von $1'$ bedürfen. Denken wir uns, um auch diesen zu erhalten, die Kreisperipherie in $360 \times 30 = 10\,800$ gleiche Theile getheilt, und die auf einander folgenden Theilpunkte mit einander verbunden,

so erhalten wir ein regelmäßiges Vieleck, dessen Umfang, den Radius = 1 gesetzt, bis zur sechsten Decimalstelle mit der Kreisperipherie übereinstimmt. Die zu einem Bogen von 2′ gehörende Sehne ist also

$$= \frac{6{,}283185}{10800}\,\mathrm{r}, \text{ mithin ist die halbe Sehne } = \frac{3{,}141593}{10800}\,\mathrm{r},$$

also
$$\sin 1' = \frac{3{,}141593\,\mathrm{r}}{10800\,\mathrm{r}} = 0{,}00002909.$$

Aus letzterem aber wird $\sin 1''$ zufolge §. 16 durch einfache Division abgeleitet werden können.

Aus den so gefundenen Werthen lassen sich, wie leicht zu übersehen, die Sinus und Cosinus und damit denn auch die übrigen trigonometrischen Functionen sämmtlicher Winkel berechnen. Bemerkt werden muß hierbei übrigens, daß die Analysis Mittel und Wege bietet, auf denen man bequemer zu demselben Ziele gelangen kann. (Algebraische Analysis, Essen 1870, Kap. 2, §. 62.)

Die am Schlusse dieses Buches abgedruckte Tafel enthält die Werthe der Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten von 0^0 bis 90^0 von 10 zu 10 Minuten. Man nennt diese Zahlen die natürlichen trigonometrischen Functionen zum Unterschiede von den Logarithmen derselben, welche man die künstlichen Functionen zu nennen pflegt. Die logarithmischen Handbücher enthalten diese gewöhnlich von Minute zu Minute. Die diesem Buche beigefügte Tafel wird der Erläuterung nicht bedürfen; über die Einrichtung der logarithmischen Tafeln ist die nöthige Erklärung in den betreffenden Handbüchern nachzusehen.

c) Anwendung der Summenformel zur Entwicklung anderweitiger Gleichungen.

§. 33. Lehrsatz.

Wenn wir die halbe Summe zweier Winkel mit σ und ihre halbe Differenz mit ϑ bezeichnen, also

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = \sigma \text{ und } \frac{\alpha-\beta}{2} = \vartheta$$

setzen, so ist
$$\alpha = \sigma + \vartheta \text{ und } \beta = \sigma - \vartheta,$$

folglich nach §. 27 und 29

$$\sin\alpha = \sin(\sigma+\vartheta) = \sin\sigma\cos\vartheta + \cos\sigma\sin\vartheta$$

und
$$\sin\beta = \sin(\sigma-\vartheta) = \sin\sigma\cos\vartheta - \cos\sigma\sin\vartheta.$$

Addiren und subtrahiren wir diese Gleichungen, so erhalten wir

$$1)\quad \mathbf{\sin}\,\alpha + \mathbf{\sin}\,\beta = 2\,\mathbf{\sin}\,\sigma\,\mathbf{\cos}\,\vartheta = 2\,.\,\mathbf{\sin}\,\frac{\alpha+\beta}{2}\,.\,\mathbf{\cos}\,\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$2)\quad \mathbf{\sin}\,\alpha - \mathbf{\sin}\,\beta = 2\,\mathbf{\cos}\,\sigma\,\mathbf{\sin}\,\vartheta = 2\,.\,\mathbf{\cos}\,\frac{\alpha+\beta}{2}\,.\,\mathbf{\sin}\,\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Ferner ist nach §. 27 und 29

$$\cos\alpha = \cos(\sigma+\vartheta) = \cos\sigma\cos\vartheta - \sin\sigma\sin\vartheta$$

und
$$\cos\beta = \cos(\sigma-\vartheta) = \cos\sigma\cos\vartheta + \sin\sigma\sin\vartheta,$$

folglich, wenn wir die Gleichungen das einemal addiren, das anderemal die obere von der untern subtrahiren,

$$3)\quad \mathbf{\cos}\,\alpha + \mathbf{\cos}\,\beta = 2\,\mathbf{\cos}\,\sigma\,\mathbf{\cos}\,\vartheta = 2\,.\,\mathbf{\cos}\,\frac{\alpha+\beta}{2}\,.\,\mathbf{\cos}\,\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$4)\quad \mathbf{\cos}\,\beta - \mathbf{\cos}\,\alpha = 2\,\mathbf{\sin}\,\sigma\,\mathbf{\sin}\,\vartheta = 2\ \mathbf{\sin}\,\frac{\alpha+\beta}{2}\,.\,\mathbf{\sin}\,\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Diese Gleichungen lehren die Summe und Differenz zweier Sinus oder Cosinus durch ein Product ersetzen und finden besonders beim Rechnen mit Logarithmen vortheilhafte Anwendung.

*§. 34. Zusatz.

Eine gleiche Umwandlung läßt sich auch dann bewerkstelligen, wenn ein Sinus und ein Cosinus addirt oder subtrahirt werden sollen. Setzen wir nämlich in den Gleichungen (1) und (2) des vorhergehenden §. $90^0 - \alpha$ statt α und berücksichtigen, daß der Cosinus eines Winkels gleich dem Sinus des Complementes ist, so erhalten wir

$$1)\ \cos\alpha + \sin\beta = \sin(90^0 - \alpha) + \sin\beta$$
$$= 2\sin\left(45^0 - \frac{\alpha - \beta}{2}\right)\cos\left(45^0 - \frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$
$$= 2\cos\left(45^0 + \frac{\alpha - \beta}{2}\right)\sin\left(45^0 + \frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$
$$2)\ \cos\alpha - \sin\beta = \sin(90^0 - \alpha) - \sin\beta$$
$$= 2\cos\left(45^0 - \frac{\alpha - \beta}{2}\right)\sin\left(45^0 - \frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$
$$= 2\sin\left(45^0 + \frac{\alpha - \beta}{2}\right)\cos\left(45^0 + \frac{\alpha + \beta}{2}\right).$$

*§. 35. Zusatz.

Wenn wir ferner in den Gleichungen (1) und (2) des §. 33 $\beta = 90^0 - \alpha$ setzen, so erhalten wir

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sin\alpha + \sin(90^0 - \alpha) = 2\sin 45^0 . \cos(\alpha - 45^0)$$
und $$\sin\alpha - \cos\alpha = \sin\alpha - \sin(90^0 - \alpha) = 2\cos 45^0 . \sin(\alpha - 45^0).$$

Nun ist aber nach §. 17 $\sin 45^0 = \cos 45^0 = \sqrt{1/2} = 1/2\sqrt{2}$, ferner $\cos(\alpha - 45^0) = \cos(45^0 - \alpha) = \sin(45^0 + \alpha)$ und $\sin(\alpha - 45^0) = -\sin(45^0 - \alpha)$; hierdurch verwandeln sich die zuletzt erhaltenen Gleichungen in

$$1)\ \sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2} . \sin(45^0 + \alpha)$$
und $$2)\ \sin\alpha - \cos\alpha = -\sqrt{2} . \sin(45^0 - \alpha).$$

*§. 36, a. Zusatz.

Mit Hülfe der für den Sinus und Cosinus der Summe oder Differenz zweier Winkel in den §§. 27 und 29 erwiesenen Formeln lassen sich auch die Tangente und Cotangente der Summe oder Differenz zweier Winkel finden. Es ist nämlich

$$1)\ \operatorname{tang}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\beta}{1 - \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\beta}$$
$$2)\ \operatorname{tang}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}\beta}{1 + \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\beta}$$
$$3)\ \operatorname{cotg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{cotg}\alpha \operatorname{cotg}\beta - 1}{\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta}$$
$$4)\ \operatorname{cotg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{cotg}\alpha \operatorname{cotg}\beta + 1}{\operatorname{cotg}\beta - \operatorname{cotg}\alpha}.$$

Beweis. Denn nach §. 20 und 27 ist

$$1)\ \operatorname{tang}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta},$$

folglich, wenn wir Zähler und Nenner des so eben erhaltenen Bruches durch das Product

$\cos\alpha \cos\beta$ dividiren und $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ durch $\operatorname{tang}\alpha$ und $\frac{\sin\beta}{\cos\beta}$ durch $\operatorname{tang}\beta$ ersetzen,

$$\operatorname{tang}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\beta}{1 - \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\beta}.$$

Ferner ist 3) $\operatorname{cotg}(\alpha+\beta) = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta}{\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta}$.

Wenn wir Zähler und Nenner dieses Bruches durch $\sin\alpha \sin\beta$ dividiren und

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{cotg}\alpha \text{ und } \frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \operatorname{cotg}\beta$$

setzen, so erhalten wir $\operatorname{cotg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{cotg}\alpha \operatorname{cotg}\beta - 1}{\operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\alpha}$.

Die Gleichungen (2) und (4) aber ergeben sich auf ganz ähnliche Weise aus den Differenzformeln des §. 29.

*§. 36, b. Zusatz.

Wenn wir in den Gleichungen (1) und (3) des vorhergehenden §. $\alpha = \beta$ setzen, so erhalten wir noch

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tang}\alpha}{1 - \operatorname{tang}\alpha^2}$$

und

$$\operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{\operatorname{cotg}\alpha^2 - 1}{2 \operatorname{cotg}\alpha}.$$

*§. 37. Lehrsatz.

Wenn drei Winkel α, β, γ zusammen einen Rechten ausmachen, so ist die Summe ihrer Cotangenten gleich dem Producte derselben, in Zeichen $\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\gamma = \operatorname{cotg}\alpha \operatorname{cotg}\beta \operatorname{cotg}\gamma$.

Beweis. Zufolge §. 36,a ist

$$\operatorname{cotg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{cotg}\alpha \operatorname{cotg}\beta - 1}{\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta},$$

und da nach der Voraussetzung der Winkel $\alpha + \beta$ den Winkel γ zu 90^0 ergänzt, so ist auch

$$\operatorname{cotg}(\alpha+\beta) = \operatorname{tang}\gamma = \frac{1}{\operatorname{cotg}\gamma}.$$

Aus der Verknüpfung dieser beiden Gleichungen ergibt sich

$$\frac{\operatorname{cotg}\alpha \operatorname{cotg}\beta - 1}{\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta} = \frac{1}{\operatorname{cotg}\gamma},$$

und wenn wir die Brüche wegschaffen,

$$\operatorname{cotg}\alpha \operatorname{cotg}\beta \operatorname{cotg}\gamma - \operatorname{cotg}\gamma = \operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta,$$

also

$$\operatorname{cotg}\alpha \operatorname{cotg}\beta \operatorname{cotg}\gamma = \operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\gamma.$$

Wir werden von diesem merkwürdigen Satze weiter unten (§. 67) nützlichen Gebrauch machen. — In ganz ähnlicher Weise läßt sich zeigen, daß wenn drei Winkel α, β, γ zusammen einen Flachen ausmachen, die Summe ihrer Tangenten gleich dem Producte derselben ist, also

$$\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\beta + \operatorname{tang}\gamma = \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\beta \operatorname{tang}\gamma.$$

*§. 38. Zusatz.

Für die Summe oder Differenz der Tangenten oder Cotangenten zweier Winkel erhält man leicht noch folgende Formeln:

$$1)\ \tang \alpha \pm \tang \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha \cos\beta}$$

$$2)\ \cotg \beta \pm \cotg \alpha = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\sin\alpha \sin\beta}$$

$$3)\ \cotg \beta \pm \tang \alpha = \frac{\cos(\alpha \mp \beta)}{\cos\alpha \sin\beta}.$$

Setzen wir endlich noch in den beiden Gleichungen, welche in der letzten Formel zusammengefaßt sind, $\beta = \alpha$, so verwandeln sich dieselben, da $\cos(\alpha - \alpha) = \cos 0 = 1$ und $2 \sin\alpha \cos\alpha = \sin 2\alpha$ ist, in

$$4)\ \cotg \alpha + \tang \alpha = \frac{1}{\cos\alpha \sin\alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha}$$

$$5)\ \cotg \alpha - \tang \alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha \sin\alpha} = 2 \cotg 2\alpha.$$

*§. 39. Zusatz.

Wenn wir die Gleichungen

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$

und

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$$

mit einander multipliciren, so erhalten wir

$$1)\ \sin(\alpha + \beta) . \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha^2 - \sin\beta^2$$
$$= \cos\beta^2 - \cos\alpha^2.$$

Eben so ergibt sich aus der Multiplication der Gleichungen

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

und

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$

die folgende Gleichung

$$2)\ \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha^2 - \sin\beta^2$$
$$= \cos\beta^2 - \sin\alpha^2.$$

Durch diese Gleichungen werden wir in den Stand gesetzt, die Differenz der Quadrate der Sinus oder Cosinus zweier Winkel durch ein Product zu ersetzen.

Bemerkung.

Die vorhergehenden Entwickelungen, welche sich sämmtlich auf die Summen- und Differenzformeln der §§. 27 und 29 stützten, gewähren uns auch die Mittel für den Beweis des folgenden Satzes.

*§. 40. Lehrsatz.

Wenn ein Winkel α, welcher 180^0 nicht übersteigt, in zwei, drei oder mehr Theile getheilt wird, so fällt die Summe und eben so das Product der Sinus dieser Theile dann am größten aus, wenn sämmtliche Theile einander gleich sind.

Beweis. Wenn wir den Winkel α zunächst in zwei Theile x und y zerlegen, so ist nach §. 33 die Summe der Sinus

$$\sin x + \sin y = 2 \sin\frac{x+y}{2} \cos\frac{x-y}{2} = 2 \sin\frac{\alpha}{2} \cos\frac{x-y}{2};$$

und nach §§. 27 und 29 ist das doppelte Product der Sinus

$$2 \sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y) = \cos(x-y) - \cos\alpha.$$

Nach §. 9 ist der Cosinus eines Winkels, welcher 180^0 nicht übersteigt, um so größer, je kleiner der Winkel ist, und am größten, wenn der Winkel verschwindet. Die vorstehenden Ausdrücke erhalten daher dann ihre größten Werthe, wenn $x - y = o$, also $x = y$ ist.

Denken wir uns von dem Winkel α irgend einen Theil z hinweggenommen und den Rest α — z in zwei Theile x und y zerlegt, so werden zufolge des eben Erwiesenen

die Summe $\sin x + \sin y$ und das Product $\sin x \sin y$

und folglich auch bei dem für z angenommenen Werthe

die Summe $\sin x + \sin y + \sin z$ und das Product $\sin x \sin y \sin z$

dann am größten, wenn $x = y$ ist. — Eben so läßt sich zeigen, daß $x = y = z$ sein muß, wenn überhaupt diese Summe und dieses Product ihre größten Werthe erhalten sollen.

In gleicher Weise fortfahrend wird die Richtigkeit der aufgestellten Behauptung dargethan, wenn der gegebene Winkel in vier und mehr Theile getheilt sein sollte.

In Betreff der Tangenten läßt sich in ähnlicher Art der folgende Satz erweisen: **Wenn ein Winkel, welcher kleiner als 90⁰ ist, in zwei oder mehr Theile getheilt wird, so ist dann die Summe der Tangenten dieser Theile am kleinsten und das Product derselben am größten, wenn alle Theile einander gleich sind.**

Zum Schlusse dieses Kapitels führen wir noch die folgenden Formeln an, welche von drei Winkeln α, β, γ in dem Falle gelten, daß dieselben, wie dies z. B. bei den Winkeln eines Dreiecks der Fall ist, zusammen einen Flachen ausmachen.

1) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos{}^1/_2\,\alpha\cos{}^1/_2\,\beta\cos{}^1/_2\,\gamma$
2) $\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma = 4\sin{}^1/_2\,\alpha\sin{}^1/_2\,\beta\cos{}^1/_2\,\gamma$
3) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 4\sin{}^1/_2\,\alpha\sin{}^1/_2\,\beta\sin{}^1/_2\,\gamma + 1$
4) $\cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma = 4\cos{}^1/_2\,\alpha\cos{}^1/_2\,\beta\sin{}^1/_2\,\gamma - 1$
5) $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$
6) $\sin 2\alpha + \sin 2\beta - \sin 2\gamma = 4\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma$
7) $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1 - 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$
8) $\cos 2\alpha + \cos 2\beta - \cos 2\gamma = 1 - 4\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$
9) $\sin\alpha^2 + \sin\beta^2 + \sin\gamma^2 = 2 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$
10) $\sin\alpha^2 + \sin\beta^2 - \sin\gamma^2 = 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$
11) $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$
12) $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 - \cos\gamma^2 = 1 - 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma.$

Wir beschränken uns darauf, die Richtigkeit der ersten Gleichung darzuthun, indem wir den Beweis für die übrigen unseren Lesern zur eigenen Uebung überlassen.

Nach §. 33 ist $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$,

und da $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$ ist, so ist

$$\sin\gamma = \sin(\alpha+\beta) = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$ folglich ist

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$= 4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\,.\cos\frac{\alpha}{2}\,.\cos\frac{\beta}{2},$$ oder da

$\frac{\alpha+\beta}{2} = 90^0 - \frac{\gamma}{2}$ ist: $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$.

Zwei den vorstehenden verwandte Gleichungen sind bereits oben (§. 37) aufgeführt worden.

Zweiter Abschnitt.

Von der Auflösung der Dreiecke.

A. Auflösung des rechtwinkligen Dreiecks.

§. 41. Erklärung.

Wenn wir mit der Hypotenuse AB eines rechtwinkligen Dreiecks ABC, Fig. 13, um den einen Endpunkt A einen Kreis beschreiben, welcher die Verlängerung der durch diesen Endpunkt gehenden Cathete AC in D schneidet, so ist, wenn wir A als Anfangspunkt der Coordinaten und AD als den positiven Schenkel der Absciſſenaxe ansehen, die Hypotenuse AB gleich dem Radius, die dem Winkel A gegenüberliegende Cathete BC gleich der Ordinate und die anliegende Cathete AC gleich der Abscisse des Endpunktes B des Bogens BD. Mithin erhalten wir, wenn wir der Kürze wegen AB = h, BC = a und AC = b setzen, folgende Gleichungen:

$$\sin A = \frac{a}{h}, \quad \cos A = \frac{b}{h},$$

$$\operatorname{tang} A = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{cotg} A = \frac{b}{a}.$$

Da wir das eben Gesagte offenbar auf jedes beliebige rechtwinklige Dreieck übertragen können, so ergeben sich uns, wenn wir die obigen Gleichungen in Worten aussprechen, für die trigonometrischen Functionen eines Winkels an der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks folgende Begriffsbestimmungen:

Der Sinus ist gleich dem Verhältnisse der gegenüberliegenden Cathete zur Hypotenuse,

der Cosinus ist gleich dem Verhältnisse der anliegenden Cathete zur Hypotenuse,

die Tangente ist gleich dem Verhältnisse der gegenüberliegenden Cathete zur anliegenden,

die Cotangente ist gleich dem Verhältnisse der anliegenden Cathete zur gegenüberliegenden.

§. 42. Zusatz.

Wenden wir die nämliche Betrachtungsweise auf den Winkel B an, so erhalten wir für die trigonometrischen Functionen desselben folgende Ausdrücke:

$$\sin B = \frac{b}{h}, \quad \cos B = \frac{a}{h},$$

$$\operatorname{tang} B = \frac{b}{a}, \quad \operatorname{cotg} B = \frac{a}{b}.$$

§. 43. Zusatz.

Aus den Gleichungen des vorvorigen §.

$$1)\quad \sin A = \frac{a}{h} \text{ und } \cos A = \frac{b}{h}$$

folgt weiter

$$2)\quad \mathbf{a = h \sin A,\ b = h \cos A}$$

und hieraus

$$3)\quad \mathbf{h = \frac{a}{\sin A},\ h = \frac{b}{\cos A}} \text{ d. h.:}$$

Wenn von einem rechtwinkligen Dreiecke die Hypotenuse und ein anliegender Winkel gegeben ist, so findet man die diesem Winkel

gegenüberliegende Cathete, indem man die Hypotenuse mit dem Sinus,

die anliegende, indem man die Hypotenuse mit dem Cosinus des gegebenen Winkels **multiplicirt.**

Ist dagegen eine Cathete und ein spitzer Winkel gegeben, so findet man die Hypotenuse, indem man

die Cathete entweder durch den Sinus des gegenüberliegenden,

oder durch den Cosinus des anliegenden Winkels **dividirt.**

Ferner folgt aus den Gleichungen

$$4)\ \text{tang}\,A = \frac{a}{b} \text{ und } \text{cotg}\,A = \frac{b}{a}$$

$$5)\ \mathbf{a = b\ tang\ A,\ b = a\ cotg\ A,}$$ d. h. in Worten:

Wenn eine Cathete und der anliegende spitze Winkel gegeben ist, so findet man

die gegenüberliegende Cathete, indem man die anliegende mit der Tangente **multiplicirt;**

ist eine Cathete und der gegenüberliegende Winkel gegeben, so findet man

die diesem anliegende Cathete, indem man die gegenüberliegende mit der Cotangente des gegebenen Winkels **multiplicirt.***)

Wir haben in (2) und (3) die Gleichungen (1) doppelt, in (5) die Fundamentalgleichungen (4) nur einmal umgekehrt. Kehren wir dieselben ebenfalls nochmals um, so erhalten wir

$$6)\ b = \frac{a}{\text{tang}\,A},\qquad a = \frac{b}{\text{cotg}\,A}.$$

Da jedoch bekanntlich $\frac{1}{\text{tang}\,A} = \text{cotg}\,A$ und $\frac{1}{\text{cotg}\,A} = \text{tang}\,A$ ist, so sind die Gleichungen (6) von den bequemeren Gleichungen (5) nicht verschieden, welchen man daher in der Regel den Vorzug gibt.

§. 44. Erklärung.

Ein Dreieck trigonometrisch auflösen heißt aus drei gegebenen Stücken (Seiten und Winkeln), welche das Dreieck bestimmen, die fehlenden trigonometrisch berechnen.

Bemerkung.

Bei der Auflösung des rechtwinkligen Dreiecks haben wir folgende Fälle zu unterscheiden: Es können gegeben sein

1) die Hypotenuse und ein (spitzer) Winkel,

2) eine Cathete und ein Winkel,

(wobei es keinen Unterschied macht, ob der gegebene Winkel der gegebenen Cathete gegenüber oder an derselben liegt, da durch den einen Winkel an der Hypotenuse offenbar auch der andere mitgegeben ist),

3) die Hypotenuse und eine Cathete,

4) beide Catheten.

---

*) Die Gleichungen dieses §. bilden die Grundlage aller folgenden Entwickelungen; es ist daher Sicherheit und Geläufigkeit in der Anwendung derselben eine unerläßliche Bedingung für das leichte und rasche Erfassen des Folgenden.

§. 45. Aufgabe.

Das rechtwinklige Dreieck ABC, Fig. 13, aufzulösen, wenn die Hypotenuse h und der Winkel A gegeben sind.

Auflösung. Wir suchen zuerst den Winkel $B = 90^0 - A$,
dann die gegenüber liegende Cathete $a = h \sin A$
und endlich die anliegende Cathete $b = h \cos A$.

Erstes Beispiel ohne Anwendung der Logarithmen.*)

Es sei gegeben $h = 8$, $A = 65^0\,20'$; so ist $B = 24^0\,40'$,
ferner $a = h \sin A = 8 \,.\, \sin 65^0\,20' = 8 \,.\, 0{,}9088 = 7{,}2704$
und $b = h \cos A = 8 \,.\, \cos 65^0\,20' = 8 \,.\, 0{,}4173 = 3{,}3384$.

Berücksichtigen wir nur die erste Decimalstelle, so ist

$a = 7{,}3$ und $b = 3{,}3$.

Zweites Beispiel mit Benutzung der Logarithmen.

Es sei gegeben $h = 528$, $A = 37^0\,18'$; so ist $B = 52^0\,42'$,

$$\begin{array}{rlrl} \log h = & 2{,}72263 & \log h = & 2{,}72263 \\ + \log \sin A = & 9{,}78246 - 10 & + \log \cos A = & 9{,}90063 - 10 \\ \hline \log a = & 2{,}50509 & \log b = & 2{,}62326 \\ a = & 319{,}96 & b = & 420{,}01. \end{array}$$

§. 46. Aufgabe.

Das rechtwinklige Dreieck ABC, Fig. 13, aufzulösen, wenn die eine Cathete a und der ihr gegenüberliegende Winkel A gegeben sind.

Auflösung. Der fehlende Winkel wird erhalten durch die Gleichung

$$B = 90^0 - A,$$

die Hypotenuse durch die Gleichung $h = \frac{a}{\sin A}$
und die anliegende Cathete durch die Gleichung $b = a \operatorname{cotg} A$.

Erstes Beispiel ohne Logarithmen.

Es sei gegeben $a = 15$, $A = 28^0\,50'$; dann ist $B = 61^0\,10'$; ferner

$$h = \frac{a}{\sin A} = \frac{15}{\sin 28^0\,50'} = \frac{15}{0{,}4823} = 31{,}1$$

$$b = a \operatorname{cotg} A = 15 \,.\, \operatorname{cotg} 28^0\,50' = 15 \,.\, 1{,}8165 = 27{,}2475$$

oder, wenn wir nur die erste Decimalstelle berücksichtigen, $b = 27{,}2$.

Zweites Beispiel mit Logarithmen.

Es sei $a = 87$, $A = 75^0\,43'$; so ist $B = 14^0\,17'$

$$\begin{array}{rlrl} \log a = & 11{,}93952 - 10 & \log a = & 1{,}93952 \\ - \log \sin A = & 9{,}98636 - 10 & + \log \operatorname{cotg} A = & 9{,}40584 - 10 \\ \hline \log h = & 1{,}95316 & \log b = & 1{,}34536 \\ h = & 89{,}78 & b = & 22{,}15. \end{array}$$

---

*) Der Verfasser hält es für zweckmäßig, Beispiele mit und ohne Logarithmen nicht gleichzeitig in Anwendung zu bringen, sondern im ersten Cursus um größerer Deutlichkeit willen nur Beispiele ohne Logarithmen rechnen zu lassen, bei einer Wiederholung der Trigonometrie im zweiten Cursus dagegen für sämmtliche Beispiele die Logarithmentafeln zu benutzen.

§. 47. Zusatz.

Wäre die Cathete a und der anliegende Winkel B gegeben, so würde man zunächst Winkel $A = 90^0 - B$ suchen und dann eben so wie im vorhergehenden §. verfahren.

§. 48. Aufgabe.

Das rechtwinklige Dreieck ABC, Fig. 13, aufzulösen, wenn die Hypotenuse h und eine Cathete a gegeben sind.

Auflösung. Nach dem pythagoräischen Lehrsatze ist die fehlende Cathete

$$b = \sqrt{h^2 - a^2}.$$

Ferner erhalten wir den Winkel A durch die Gleichung

$$\sin A = \frac{a}{h};$$

dann ist Winkel $B = 90^0 - A.$

Erstes Beispiel ohne Logarithmen.

Es sei $h = 16$, $a = 13$; dann ist

$$b = \sqrt{16^2 - 13^2} = \sqrt{256 - 169} = \sqrt{87} = 9{,}3$$

$$\sin A = \frac{13}{16} = 0{,}8125, \text{ also } A = 54^0\,20'$$

und folglich $B = 35^0\,40'.$

Zweites Beispiel mit Logarithmen.

Es sei gegeben $h = 7935$, $a = 2408$. Wir ordnen hier die Rechnung am bequemsten so, daß wir zuerst den Winkel A durch die Gleichung

$$\sin A = \frac{a}{h}$$

suchen und dann die fehlende Cathete b durch die Gleichung

$$b = h \cos A$$

berechnen. Die Ausrechnung ist hiernach folgende:

$$\begin{aligned} \log a &= 13{,}38166 - 10 \\ -\log h &= 3{,}89955 \\ \hline \log\sin A &= 9{,}48211 - 10 \\ A &= 17^0\,39'\,57'' \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log h &= 3{,}89955 \\ +\log\cos A &= 9{,}97902 - 10 \\ \hline \log b &= 3{,}87857 \\ b &= 7560{,}8 \end{aligned}$$

folglich $B = 72^0\,20'\,3''.$

Bemerkung. Nur in dem Falle, daß die Hypotenuse und Cathete sich um einen verhältnißmäßig geringen Betrag unterscheiden, empfiehlt es sich im Interesse größerer Genauigkeit zunächst die andere Cathete zu berechnen.

Ist z. B. $h = 1001$, $a = 1000$ gegeben, so liefert eine nach dem vorigen Gange geleitete Rechnung

$$\begin{aligned} \log a &= 13 \qquad\quad - 10 \\ -\log h &= 3{,}00043 \\ \hline \log\sin A &= 9{,}99957 - 10 \end{aligned}$$

für A den Werth $A = 87^0\,27'.$

Da bei einem Winkel, welcher sich einem Rechten so sehr nähert, wie der vorliegende, der Sinus nur noch unbedeutend wächst und damit denn auch die Logarithmen der Sinus nur noch um sehr geringe Werthe zunehmen, so bleibt es unentschieden, ob das erhaltene Resultat genau ist oder nicht. Hier empfiehlt es sich nun, zunächst die andere Cathete b zu berechnen. Die Gleichung $b = \sqrt{h^2 - a^2}$ wird behufs bequemer Rechnung mit Logarithmen auf die Form $b = \sqrt{(h + a)\,(h - a)}$

gebracht, und wir erhalten so:

$$\log(h + a) = 3,30125$$
$$+ \log(h - a) = 0$$
$$\overline{3,30125}$$
$$\log b = \frac{3,30125}{2} = 1,65062$$
$$b = 44,732$$

$$\log b = 11,65062 - 10$$
$$- \log h = 3,00043$$
$$\log \sin B = 8,65019 - 10$$
$$B = 2^0\,33'\,41'',\text{ mithin}$$
$$A = 87^0\,26'\,19''.$$

§. 49. Aufgabe.

Das rechtwinklige Dreieck ABC, Fig. 13, aufzulösen, wenn die beiden Catheten a und b gegeben sind.

Auflösung. Nach dem pythagoräischen Lehrsatze ist die Hypotenuse

$$h = \sqrt{a^2 + b^2};$$

den Winkel A aber erhalten wir durch die Gleichung

$$\tang A = \frac{a}{b};$$

dann ist

$$\text{Winkel } B = 90^0 - A.$$

Erstes Beispiel ohne Logarithmen.

Es sei gegeben $a = 4$, $b = 3$; dann ist

$$h = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$
$$\tang A = {}^4/_3 = 1,3333,\text{ also } A = 53^0\,8' \text{ und } B = 36^0\,52'.$$

Zweites Beispiel mit Logarithmen.

Es sei gegeben $a = 718$, $b = 590$. Wir suchen hier am bequemsten zuerst den Winkel A durch die Gleichung

$$\tang A = \frac{a}{b}$$

und hierauf die Hypotenuse durch die Gleichung $h = \frac{a}{\sin A}$.

Die Rechnung ist nun folgende:

$$\log a = 2,85612$$
$$- \log b = 2,77085$$
$$\log \tang A = 0,08527$$
$$A = 50^0\,35'\,21''$$
$$B = 39^0\,24'\,39''.$$

$$\log a = 12,85612 - 10$$
$$- \log \sin A = 9,88796 - 10$$
$$\log h = 2,96816$$
$$h = 929,3.$$

Uebungsbeispiele

a) ohne Logarithmen.

Gegeben.	Gesucht.
1) $h = 12$; $A = 28^0\,20'$	$a = 5,695$; $b = 10,562$
2) $h = 16$; $A = 37^0\,10'$	$a = 9,666$; $b = 12,75$
3) $h = 34$; $B = 19^0\,30'$	$a = 32,048$; $b = 11,349$
4) $h = 41$; $B = 50^0\,25'$	$a = 26,125$; $b = 31,599$
5) $a = 11$; $A = 47^0\,12'$	$h = 14,992$; $b = 10,186$
6) $a = 9$; $A = 60^0\,4'$	$h = 10,385$; $b = 5,182$
7) $a = 19$; $B = 59^0\,24'$	$h = 37,328$; $b = 32,127$
8) $b = 42$; $A = 19^0\,43'$	$h = 44,614$; $a = 15,053$
9) $h = 13$; $a = 5$	$b = 12$; $A = 22^0\,37'$
10) $h = 15$; $a = 8$	$b = 12,688$; $A = 32^0\,14'$
11) $h = 20$; $b = 17$	$a = 10,536$; $A = 31^0\,47'$
12) $a = 16$; $b = 9$	$h = 18,358$; $A = 60^0\,38'$

b) mit Logarithmen.

1)	$h = 1508$;	$A = 27^0\,2'$	$a = 685,4$;	$b = 1343,2$
2)	$h = 386,2$;	$A = 19^0\,47'$	$a = 130,71$;	$b = 363,41$
3)	$h = 5439,5$;	$A = 47^0\,7'$	$a = 3985,7$;	$b = 3701,6$
4)	$h = 43,318$;	$B = 72^0\,3'$	$a = 13,35$;	$b = 41,21$
5)	$h = 756,4$;	$B = 37^0\,58'\,30''$	$a = 596,26$;	$b = 465,42$
6)	$h = 6932$;	$B = 51^0\,39'\,24''$	$a = 4300,5$;	$b = 5436,9$
7)	$a = 2516$;	$A = 42^0\,5'$	$h = 3754,1$;	$b = 2786,1$
8)	$a = 374,8$;	$A = 62^0\,48'$	$h = 421,4$;	$b = 192,62$
9)	$a = 24,055$;	$A = 12^0\,54'\,36''$	$h = 107,67$;	$b = 104,95$
10)	$a = 2934$;	$B = 50^0\,14'$	$h = 4586,8$;	$b = 3525,7$
11)	$a = 3,689$;	$B = 5^0\,31'$	$h = 3,7062$;	$b = 0,3563$
12)	$b = 377,4$;	$A = 61^0\,5'\,8''$	$h = 780,55$;	$a = 683,25$
13)	$h = 593,4$;	$a = 426,5$	$A = 45^0\,57'$;	$b = 412,58$
14)	$h = 7798$;	$a = 4105$	$A = 31^0\,45'\,49''$;	$b = 6630,1$
15)	$h = 4069$;	$a = 4065$	$b = 180,37$;	$B = 2^0\,32'\,26''$
16)	$a = 3869$;	$b = 4792$	$A = 38^0\,55'$;	$h = 6159$
17)	$a = 5596$;	$b = 3933$	$A = 54^0\,54'$;	$h = 6839,9$
18)	$a = 216,7$;	$b = 784,7$	$A = 15^0\,26'\,17''$;	$h = 814,07$.

1) Ein auf horizontaler Ebene vertikal aufgestellter Stab von 3^m Länge wirft einen Schatten von $5,491^m$ Länge. Wie groß ist die Sonnenhöhe (d. h. der Winkel, welchen die von der Spitze des Stabes nach dem Endpunkte des Schattens gezogene Linie mit der Horizontalen bildet)? — Antw. $28^0\,39'$.

2) Eine von Westen nach Osten verlaufende Chaussee ist auf beiden Seiten mit Pappeln bepflanzt. Eines Mittags reichte der Schatten einer dieser Pappeln gerade bis an den gegenüberliegenden Rand der Chaussee. Wie breit ist dieselbe, wenn die Pappel eine Höhe von $11,85^m$ hatte und die Sonne $38^0\,32'$ über dem Horizonte stand? — Antw. $14,88^m$.

3) Unter welchem Winkel sind Eisenbahnschienen gegen eine horizontale Ebene geneigt, wenn die Steigung $1:20$ beträgt? — Antw. $2^0\,51'\,57,6''$.

4) Unter welchem Gesichtswinkel erscheint vom Monde aus gesehen der Erdhalbmesser, wenn die mittlere Entfernung des Mondes von der Erde 51800 Meilen und der Radius der Erde 859,4 Meilen beträgt? (Horizontalparallaxe des Mondes.) — Antw. $57'$ (ohngefähr).

5) Wie hoch befindet sich ein Fußgänger über seinem Ausgangspunkte, wenn er auf einer gleichmäßig unter einem Winkel von 2^0 ansteigenden Chaussee eine Meile (7500^m) zurückgelegt hat? — Antw. $261,75^m$.

6) Ein Beobachter erblickte von einem Kirchthurme aus, in einer Höhe von $41,5^m$ über dem Erdboden, das Bild der Sonne in einem in einiger Entfernung befindlichen Teiche. Wie weit ist die Stelle des Teiches, von welcher die Sonnenstrahlen in das Auge des Beobachters zurückgeworfen werden, von dem Fuße des Kirchthurmes entfernt, wenn die Sonne zur Zeit der Beobachtung $10^0\,31'$ über dem Horizonte stand und der Teich mit dem Fuße des Kirchthurmes in einer horizontalen Ebene liegt? — Antw. $223,55^m$.

7) Unter welchem Gesichtswinkel erscheint eine vertikal stehende Stange von 16^m Länge, wenn eine durch das Auge des Beobachters gelegte horizontale

Ebene die Stange 2^m über dem Boden trifft und der Beobachter 80^m von der Stange entfernt ist? — Antw. $11^0 21' 30''$.

8) Wie groß ist die von der Spitze eines Berges, dessen Höhe = a gegeben ist, an die kugelförmige Erdoberfläche gezogene Tangente t, wenn der Radius dieser Kugel mit r bezeichnet wird? — Antw. $t = \sqrt{a\,(2r + a)}$.

9) Wie hoch über dem Meeresspiegel muß das Licht eines Leuchtthurmes angebracht sein, wenn es 3 geographische Meilen weit sichtbar sein soll? (Von der atmosphärischen Strahlenbrechung abgesehen.) — Antw. $38{,}85^m$.

10) Wenn eine Eisenbahn aus einer Richtung AB, Fig. 18, in eine andere Richtung DE durch eine Curve, einen Kreisbogen, übergeführt werden soll, und der Radius $BC = CD = \rho$ und der Winkel BFD, unter welchem sich die verlängerten geraden Bahnlinien AB und DE schneiden, $= \alpha$ gegeben ist, so wird der Abstand der Berührungspunkte B und D von dem Durchschnittspunkte F, wenn wir diesen Abstand $BF = DF$ mit a bezeichnen, erhalten durch die Gleichung $a = \rho \operatorname{cotg} {}^1\!/_2\,\alpha$.

11) Wenn dagegen der Anschlußpunkt B der Curve an die gerade Bahnlinie AB und folglich auch $BF = DF = a$ gegeben ist und der Krümmungsradius ρ gesucht werden soll, so wird dieser gefunden durch die Gleichung

$$\rho = a \operatorname{tang} {}^1\!/_2\,\alpha.$$

12) Eine Kugel erscheint unserm Auge als Punkt, wenn ihr scheinbarer Durchmesser 45 Secunden (oder weniger) beträgt. Wie weit ist nun ein Luftballon von 12^m Durchmesser von einem Beobachter entfernt, wenn er diesem als Punkt erscheint, und wie hoch befindet sich derselbe über der als Ebene gedachten Erdoberfläche, wenn er in einer Höhe von 8^0 über dem Horizonte erblickt wird? — Antw. 55004^m, 7655^m.

(Da die Logarithmen der trigonometrischen Functionen von Winkeln, welche kleiner als eine Minute sind, sich in der von uns benutzten Logarithmentafel nicht vorfinden, so erinnern wir daran, daß bei sehr kleinen Winkeln die Sinus wie die Tangenten der Größe des Winkels proportional zu- oder abnehmen. So ist z. B. $\sin 1'' = \frac{\sin 1'}{60}$, mithin $\log \sin 1'' = \log \sin 1' - \log 60$, woraus für irgend einen andern kleinen Winkel z. B. $31''$ weiter folgt $\log \sin 31'' = \log \sin 1' + \log 31 - \log 60$.)

Zu der Aufgabe (8) bemerken wir noch Folgendes: Da die Höhe eines Berges auf der Erde gegen den Radius derselben nur klein ist und daher auch der Bogen BD, Fig. 26, nur eine geringe Größe hat, so werden wir ohne erheblichen Fehler den Bogen BD mit der Tangente AD verwechseln dürfen, zumal es bei dieser Aufgabe wohl überhaupt nicht auf einen hohen Grad von Genauigkeit abgesehen sein dürfte. Setzen wir daher $BD = AD = w$, so ist in dem rechtwinkligen Dreiecke ADC

$$w^2 = (r + a)^2 - r^2 = 2ar + a^2,$$

also

$$w = \sqrt{2ar + a^2}.$$

Beschränken wir uns, wenn wir die gesuchte Gesichtsweite in geographischen Meilen ausdrücken, auf die erste Decimalstelle, so bemerken wir ferner bei dem Ausziehen der Quadratwurzel sehr bald, daß das zweite Glied unter dem Wurzelzeichen (a^2) auf das Resultat unserer Rechnung keinen Einfluß hat; wir werden daher auch kürzer setzen können

$$w = \sqrt{2ar}.$$

Der so erhaltene Werth von w bedarf jedoch, wenn er der wirklichen Beobachtung entsprechen soll, noch einer Correction wegen der atmosphärischen Strahlenbrechung. (S. Anfangsgründe der Physik §. 198.)

In der folgenden Tabelle bedeutet a die Höhe eines Berges, in Tausendteln einer geogr. Meile ausgedrückt (eine Tausendtel-Meile = 7,5 Meter ohngefähr), w die Gesichtsweite ohne Strahlenbrechung in geogr. Meilen und w' die durch die Strahlenbrechung vergrößerte Gesichtsweite, wenn diese Vergrößerung zu 7 Procent angenommen wird.

a	1	10	100	1000
w	1,3	4,1	13,1	41,4
w'	1,4	4,4	14,0	44,3

B. Auflösung des gleichschenkligen Dreiecks.

Bemerkung.

Bei der Auflösung des gleichschenkligen Dreiecks haben wir folgende Fälle zu unterscheiden. Es können gegeben sein

1) eine Seite und ein Winkel, (wobei es gleichgiltig ist, ob der Winkel an der Spitze oder an der Grundlinie liegt, da, wie leicht zu sehen, die Winkel eines gleichschenkligen Dreiecks sämmtlich bestimmt sind, wenn einer derselben gegeben ist);

2) die Grundlinie und ein Winkel;

3) eine Seite und die Grundlinie.

Wir bezeichnen im Folgenden der Kürze wegen im gleichschenkligen Dreiecke ABC, Fig. 14, die gleichen Seiten AB und AC mit b und die Grundlinie BC mit a.

§. 50. Aufgabe.

Das gleichschenklige Dreieck ABC, Fig. 14, aufzulösen, wenn eine Seite b und der Winkel an der Spitze A gegeben sind.

Auflösung. Wenn wir die Höhe AD ziehen, so wird bekanntlich die Grundlinie und der Winkel an der Spitze halbirt. Nun ist in dem rechtwinkligen Dreiecke ABD

$$\text{Winkel } B = 90^0 - {}^1/_2 A$$

und

$$\text{Cathete } BD = b \sin {}^1/_2 A,$$

also

$$a = BC = 2b \sin {}^1/_2 A.$$

Wir fügen dieser und den beiden folgenden Aufgaben keine in bestimmten Zahlen ausgeführten Beispiele bei, da die hier anzuwendenden Rechnungsarten mit den oben für das rechtwinklige Dreieck durchgeführten übereinstimmen.

§. 51. Aufgabe.

Das gleichschenklige Dreieck ABC, Fig. 14, aufzulösen, wenn die Grundlinie BC = a und der Winkel A an der Spitze gegeben sind.

Auflösung. Zunächst ist der Winkel

$$B = 90^0 - {}^1/_2 A,$$

und wenn wir die Höhe AD ziehen, Seite

$$b = \frac{BD}{\sin {}^1/_2 A} = \frac{{}^1/_2 a}{\sin {}^1/_2 A} = \frac{a}{2 \sin {}^1/_2 A}.\text{*)}$$

*) Es würde sehr unrichtig sein, wenn man $2 \sin {}^1/_2 A = \sin A$ setzen wollte; vielmehr ist nach §. 30, $b \sin A = 2 \sin {}^1/_2 A \cos {}^1/_2 A$.

§. 52. Aufgabe.

Das gleichschenklige Dreieck ABC, Fig. 14, aufzulösen, wenn eine Seite AB = b und die Grundlinie BC = a gegeben sind.

Auflösung. Ziehen wir wieder die Höhe AD, so ist in dem rechtwinkligen Dreiecke ABD

$$\sin {}^1\!/_2 A = \frac{BD}{b} = \frac{{}^1\!/_2 a}{b} = \frac{a}{2b}.$$

Ist aus dieser Gleichung $^1/_2A$, also auch A gefunden, so ist $B = 90^0 - {}^1/_2A$.

C. Auflösung des Dreiecks überhaupt.

Bemerkung.

Während die nächstvorhergehenden Sätze lediglich das rechtwinklige und das gleichschenklige Dreieck betrafen, gelten die nun folgenden Entwickelungen für sämmtliche Dreiecke, es mögen dieselben rechtwinklig oder schiefwinklig, gleichschenklig oder ungleichschenklig sein. Wir bezeichnen hierbei die Winkel des Dreiecks mit den großen Buchstaben des lateinischen Alphabets A, B und C und die diesen Winkeln gegenüberliegenden Seiten mit den kleinen Buchstaben a, b und c. In Uebereinstimmung mit den Sätzen über die Congruenz der Dreiecke haben wir vier Fälle zu unterscheiden. Es können nämlich gegeben sein:

1) eine Seite und zwei Winkel, (wobei es gleichgiltig ist, ob die Winkel beide an der gegebenen Seite liegen oder der eine an derselben, der andere ihr gegenüber liegt, da durch zwei Winkel allemal auch der dritte Winkel des Dreiecks bestimmt ist);

2) zwei Seiten und der der einen gegenüberliegende Winkel;

3) zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel;

4) alle drei Seiten.

Ehe wir zu der Behandlung der einzelnen Fälle übergehen, schicken wir die Gleichungen §. 53 und 54 voraus, welche die Grundlage für die Auflösung des Dreiecks überhaupt bilden.

§. 53, a. Lehrsatz.

In jedem Dreiecke ist $\mathbf{a \sin B = b \sin A}$.

Beweis. Wir haben hier drei Fälle zu unterscheiden:

1) Wenn die Winkel A und B beide spitz sind, Fig 15, so fällt die aus C auf AB gezogene Senkrechte CD innerhalb des Dreiecks ABC. Nun ist in dem rechtwinkl. Dreiecke BCD $CD = a \sin B$
und in dem rechtwinkl. Dreiecke ACD $CD = b \sin A$,
folglich $a \sin B = b \sin A$.

2) Die so eben erwiesene Gleichung bleibt auch dann noch richtig, wenn ein der Seite AB anliegender Winkel, z. B. A, ein stumpfer ist, Fig. 16, und daher das Lot CD außerhalb des Dreiecks fällt. Zunächst ist in dem rechtwinkl. Dreiecke BCD $CD = a \sin B$.
Bezeichnen wir ferner den spitzen Nebenwinkel CAD des stumpfen Winkels A mit α, so ist in dem rechtwinkl. Dreiecke ACD $CD = b \sin \alpha$
oder, da der Sinus des stumpfen Winkels gleich dem Sinus des spitzen Nebenwinkels, also $\sin A = \sin \alpha$ ist, $CD = b \sin A$.
Folglich ist auch jetzt $a \sin B = b \sin A$.

3) Ist endlich der Winkel A, Fig. 17, ein rechter, so ist

$$\sin A = \sin 90^0 = 1.$$

Die zu erweisende Gleichung geht folglich über in

$$a \sin B = b \,.\, 1 = b,$$

eine Gleichung, die sich uns bereits oben (§. 45) ergeben hat.

§. 53, b. Zusatz.

Die Gleichung des vorhergehenden §.

$$a \sin B = b \sin A$$

läßt sich auch in die Proportion

$$\mathbf{a : b = \sin A : \sin B}$$

umformen, und da das für zwei Seiten des Dreiecks und die ihnen gegenüberliegenden Winkel Erwiesene auch für jedes andere Paar gelten muß, so können wir auch weiter folgern

$$a : c = \sin A : \sin C$$

und $$b : c = \sin B : \sin C.$$

Die drei vorstehenden Proportionen lassen sich in folgender Art zusammenziehen: $$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$$
und liefern uns in Worten ausgedrückt den Satz:

Die Seiten eines Dreiecks verhalten sich wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel. — Man pflegt diesen Satz als den Sinussatz zu bezeichnen.

Derselbe setzt uns, wie wir weiter unten (§. 56 u. 57) sehen werden, allein schon in den Stand, die beiden ersten der in der Bemerkung auf Seite 42 aufgeführten Aufgaben über die Auflösung des Dreiecks zu erledigen. Derselbe ergänzt überdies eine wesentliche Lücke der Planimetrie. In dieser wird zwar gezeigt, daß gleichen Seiten auch gleiche Winkel gegenüber stehen und daß der größeren Seite ein größerer Winkel gegenüberliegt; dagegen gibt die Planimetrie keinen Aufschluß darüber, wie allgemein das Verhältniß zweier Seiten eines Dreiecks durch die Größe der gegenüberliegenden Winkel bedingt wird, eine Lücke, welche durch den vorstehenden trigonometrischen Lehrsatz ausgefüllt wird.

*§. 54. Lehrsatz.

In jedem Dreiecke ist $c = a \cos B + b \cos A$.

Beweis. Wir haben hier so wie in §. 53,a drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem die Winkel A und B beide spitz sind, oder wenn einer derselben, z. B. A, ein stumpfer oder ein rechter ist. Construiren wir eben so wie in §. 53, a, so ist in dem ersten Falle, Fig. 15,

$$c = BD + AD = a \cos B + b \cos A.$$

In dem zweiten Falle, Fig. 16, ist

$$c = BD - AD = a \cos B - b \cos \alpha.$$

Nach §. 13 ist der Cosinus des stumpfen Winkels A gleich dem negativen Cosinus des spitzen Nebenwinkels α, also

$$\cos A = -\cos \alpha, \text{ mithin } -b \cos \alpha = +b \cos A.$$

Setzen wir diesen Werth in die vorhergehende Gleichung ein, so verwandelt sich dieselbe in $$c = a \cos B + b \cos A.$$

Ist endlich drittens, Fig. 17, der Winkel $A = 90^0$, so ist $\cos A = 0$, und die zu erweisende Gleichung verwandelt sich folglich in

$$c = a \cos B,$$

eine Gleichung, deren Richtigkeit aus §. 45 hervorgeht.

Da in der Gleichung $c = a \cos B + b \cos A$ fünf Stücke, drei Seiten a, b, c und zwei Winkel A, B vorkommen, die trigonometrischen Aufgaben aber niemals dahin lauten, aus vier Stücken ein fünftes zu finden, sondern allemal die Forderung stellen, aus drei gegebenen Stücken ein viertes zu berechnen, so findet diese Gleichung bei der Auflösung der Dreiecke keine unmittelbare Verwendung; sie wird uns aber in den allgemeinen Ableitungen der weiterhin aufzuführenden trigonometrischen Formeln, durch welche die Auflösung der 3. und 4. der in der Bemerkung auf Seite 42 zusammengestellten Aufgaben gewonnen wird, wesentliche Unterstützung gewähren.

*§. 55. Zusatz.

In den beiden Gleichungen

$$1)\quad a \sin B = b \sin A$$

und

$$2)\quad c = a \cos B + b \cos A,$$

welche wir in den §§. 53,a und 54 für alle möglichen Dreiecke als richtig dargethan haben, ist die Auflösung des Dreiecks bereits vollständig enthalten. Denn da durch zwei Winkel eines Dreiecks bekanntlich der dritte bestimmt wird, so bleiben, wenn von einem Dreiecke drei Stücke gegeben sind, noch zwei zu suchen übrig. Zwei Gleichungen reichen aber bekanntlich im allgemeinen aus, um zwei gesuchte Größen zu berechnen, wie wir dies ausführlich im Einzelnen in den nächsten §§. entwickeln werden.

Wir haben die obigen Gleichungen beide aus der Figur nachgewiesen; es bedarf jedoch der synthetischen Herleitung nur für die erste dieser Gleichungen, indem sich aus derselben die andere auch auf rein analytischem Wege ableiten läßt. Da nämlich das für irgend zwei Seiten a und b eines Dreiecks Erwiesene offenbar auch für je zwei andere gelten muß, so können wir auch setzen:

$$c \sin A = a \sin C$$

oder, da $C = 180^0 - (A + B)$, also $\sin C = \sin (A + B)$ ist,

$$c \sin A = a \sin (A + B).$$

Entwickeln wir $\sin (A + B)$ nach der Summenformel, so verwandelt sich diese Gleichung in

$$c \sin A = a \sin A \cos B + a \cos A \sin B$$

oder, da $a \sin B = b \sin A$ ist,

$$c \sin A = a \sin A \cos B + b \sin A \cos A,$$

also, wenn wir die ganze Gleichung durch $\sin A$ dividiren,

$$c = a \cos B + b \cos A.$$

Es ist daher schon in der einfachen Gleichung

$$a \sin B = b \sin A$$

die ganze Trigonometrie enthalten.

§. 56. Aufgabe.

Das Dreieck ABC, Fig. 19, aufzulösen, wenn eine Seite a und zwei Winkel A und B gegeben sind.

Auflösung. Da zwei Winkel A und B gegeben sind, so ist auch der dritte Winkel

$$1)\quad C = 180^0 - (A + B)$$

bekannt. Die fehlenden Seiten aber werden gefunden nach dem Sinussatze durch die Gleichungen

$$2)\ b = \frac{a \sin B}{\sin A}\text{*)} \qquad 3)\ c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

Erstes Beispiel ohne Logarithmen.

Es sei gegeben $a = 57$, $A = 44^0\ 20'$ und $B = 23^0\ 40'$; dann ist $C = 112^0$; ferner

$$b = \frac{a \,.\, \sin B}{\sin A} = \frac{57 \,.\, 0{,}4014}{0{,}6988} = \frac{22{,}8798}{0{,}6988} = 32{,}7$$

und

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{57 \,.\, 0{,}9272}{0{,}6988} = \frac{52{,}8504}{0{,}6988} = 75{,}8.$$

(Man findet nämlich den Sinus des stumpfen Winkels $C = 112^0$, indem man den Sinus des spitzen Nebenwinkels $= 68^0$ aufschlägt.)

Zweites Beispiel mit Logarithmen.

Es sei $a = 827$, $A = 101^0\ 40'$, $B = 20^0\ 30'$; dann ist

$$C = 57^0\ 50'$$

und die fehlenden Seiten b und c werden gefunden durch folgende Rechnung:

$\log a =$	$2{,}91751$	$\log a =$	$2{,}91751$
$+ \log \sin B =$	$9{,}54433 - 10$	$+ \log \sin C =$	$9{,}92763 - 10$
	$12{,}46184 - 10$		$12{,}84514 - 10$
$- \log \sin A =$	$9{,}99093 - 10$**)	$- \log \sin A =$	$9{,}99093 - 10$
$\log b =$	$2{,}47091$	$\log c =$	$2{,}85421$
$b =$	$295{,}74$	$c =$	$714{,}84$

§. 57. Aufgabe.

Das Dreieck ABC, Fig. 19, aufzulösen, wenn zwei Seiten a und b und der der einen gegenüberliegende Winkel A gegeben sind.

Auflösung. Man suche zuerst den der andern Seite gegenüberliegenden Winkel B nach dem Sinussatze durch die Gleichung

$$1)\ \sin B = \frac{b \sin A}{a}\text{***)}.$$

Dann ist auch der dritte Winkel

$$2)\qquad C = 180^0 - (A + B)$$

bekannt, und die fehlende Seite c ergibt sich durch die Gleichung

$$3)\qquad c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

Erstes Beispiel ohne Logarithmen.

Es sei gegeben $a = 18$, $b = 12$, $A = 47^0\ 40'$; dann ist

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{12 \,.\, 0{,}7392}{18} = 0{,}4928,$$

*) Es ist bequem, diese Gleichung zu lesen: b verhält sich zu a wie sin b zu sin A, und gleichzeitig zu schreiben: $b = \frac{a \sin B}{\sin A}$.

**) Der Sinus des stumpfen Winkels $101^0\ 40'$ ist nämlich gleich dem Sinus des spitzen Nebenwinkels $78^0\ 20'$.

***) Man lese: sin B verhält sich zu b wie sin A zu a.

folglich $B = 29^0\,30'$ *),

$$C = 180^0 - (A + B) = 180^0 - 77^0\,10' = 102^0\,50',$$

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{18\,.\,0{,}9750}{0{,}7392} = \frac{17{,}5500}{0{,}7392} = 23{,}7.$$

Zweites Beispiel mit Logarithmen.

Ist $a = 17$, $b = 15$, $A = 41^0\,52'$, so ist die Rechnung folgende:

$$\begin{array}{rl} \log b = & 1{,}17609 \\ + \log \sin A = & 9{,}82439 - 10 \\ \hline & 11{,}00048 - 10 \\ - \log a = & 1{,}23045 \\ \hline \log \sin B = & 9{,}77003 - 10 \\ B = & 36^0\,4'\,40'' \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log a = & 1{,}23045 \\ + \log \sin C = & 9{,}99031 - 10 \\ \hline & 11{,}22076 - 10 \\ - \log \sin A = & 9{,}82439 - 10 \\ \hline \log c = & 1{,}39637 \\ c = & 24{,}91 \end{array}$$

$$C = 180^0 - (A + B) = 102^0\,3'\,20''.$$

§. 58. Zusatz.

Durch die Gleichung (1) des vorhergehenden §.

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a}$$

erhalten wir zunächst den Sinus des gesuchten Winkels B und hieraus diesen Winkel selbst. Weil aber jeder Sinus sowohl einem stumpfen als einem spitzen Winkel angehört, so liefert diese Gleichung zwei Werthe für B; und in der That existiren, wenn $a < b$, aber $> b \sin A$ ist, zwei verschiedene Dreiecke ABC und AB'C, Fig. 22, welche in den drei gegebenen Stücken, zwei Seiten a und b und dem der einen a gegenüberliegenden Winkel A, übereinstimmen, und bei denen die der andern gegebenen Seite b gegenüberliegenden Winkel ABC und AB'C sich zu 180^0 ergänzen. Wenn dagegen $a > b$ ist, Fig. 19, so ist Winkel B nothwendig spitz, da nur der größten Seite im Dreiecke ein stumpfer Winkel gegenüberliegen kann; und es existirt daher in diesem Falle nur ein Dreieck, welches die gegebenen Stücke enthält. Von den beiden sich zu 180^0 ergänzenden Werthen, welche die Gleichung (1) für den Winkel B liefert, ist dann für die Auflösung der Aufgabe selbst nur der unter 90^0 liegende zu brauchen, ein Umstand, welcher sich übrigens auch in der Rechnung selbst dadurch zu erkennen gibt, daß der zweite durch Gleichung (1) für den Winkel B gelieferte Werth mit dem gegebenen Winkel A zusammen mehr als 180^0 beträgt.

Wenn $a = b \sin A$ ist, so ist $\sin B = 1$, also $B = 90^0$ und folglich das aufzulösende Dreieck rechtwinklig.

Wenn endlich $a < b \sin A$ (d. h. a kleiner als das aus C auf AB gefällte Lot) sein sollte, so würde in der Gleichung (1) $\sin B > 1$, also Winkel B selbst unmöglich werden, da ein Sinus niemals größer als 1 sein kann; es existirt dann gar kein Dreieck, welches die gegebenen Stücke enthält.

Die Gleichung (1) liefert hiernach für den Winkel B zwei brauchbare Werthe, wenn $a < b$, aber $> b \sin A$ ist. — Wenn aber B zwei Werthe erhält, so ist klar, daß sich dann aus der Gleichung (2) auch für den dritten

*) Soll die noch fehlende Seite c nur bis auf eine Decimalstelle genau berechnet werden, so dürfen wir die hier auftretende kleine Differenz vernachlässigen.

Winkel C und folglich aus der Gleichung (3) für die dritte Seite c zwei Werthe ergeben.

Zur Erläuterung des eben Gesagten mögen folgende Beispiele dienen:

Erstes Beispiel ohne Logarithmen.

Es sei gegeben $a = 12$, $b = 17$, $A = 33^0$. Dann ist

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{17 . 0{,}5446}{12} = 0{,}7715,$$

folglich $B = 50^0\ 30'$ und $129^0\ 30'$.

Bezeichnen wir nun den Winkel ACB mit C und ACB' mit C', so ist Winkel $C = 180^0 - (A+B) = 96^0\ 30'$ und $C' = 180^0 - (A + B') = 17^0\ 30'$. Bezeichnen wir ferner die Seite AB mit c und AB' mit c', so ist

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{12 . 0{,}9936}{0{,}5446} = 21{,}9$$

$$c' = \frac{a \sin C'}{\sin A} = \frac{12 . 0{,}3007}{0{,}5446} = 6{,}6.$$

Zweites Beispiel mit Logarithmen.

Es sei gegeben $a = 512$, $b = 716$, $A = 40^0\ 40'$; dann ist die Rechnung folgende:

$$\begin{array}{rl} \log b = & 2{,}85491 \\ + \log \sin A = & 9{,}81402 - 10 \\ \hline & 12{,}66893 - 10 \\ - \log a = & 2{,}70927 \\ \hline \log \sin B = & 9{,}95966 - 10 \end{array}$$

$$B = 65^0\ 41',\quad B' = 114^0\ 19'$$
$$C = 73^0\ 39',\quad C' = 25^0\ 1'.$$

$$\begin{array}{rl} \log a = & 2{,}70927 \\ + \log \sin C = & 9{,}98207 - 10 \\ \hline & 12{,}69134 - 10 \\ - \log \sin A = & 9{,}81402 - 10 \\ \hline \log c = & 2{,}87732 \\ c = & 753{,}9 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log a = & 2{,}70927 \\ + \log \sin C' = & 9{,}62622 - 10 \\ \hline & 12{,}33549 - 10 \\ - \log \sin A = & 9{,}81402 - 10 \\ \hline \log c' = & 2{,}52147 \\ c' = & 332{,}25. \end{array}$$

*§. 59. Zusatz.

Man kann die fehlende Seite c auch leicht unmittelbar durch die gegebenen Stücke a, b, A ausdrücken. Nach §. 54 ist nämlich

$$1)\ c = b \cos A + a \cos B.$$

Da $\sin B = \frac{b \sin A}{a}$ ist, so ist $\cos B = \pm\sqrt{1 - \frac{b^2 \sin A^2}{a^2}}$ und $a \cos B = \pm\sqrt{a^2 - b^2 \sin A^2}$. Setzen wir diesen Werth in die Gleichung (1) ein, so verwandelt sich dieselbe in

$$2)\ c = b \cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin A^2}.$$

Diese Gleichung zeigt augenfällig, daß c möglicher Weise zwei Werthe erhalten kann, ferner daß dieselben in den einen Werth $c = b \cos A$ zusammenfallen, wenn $a = b \sin A$ ist, und daß c imaginär wird, wenn $a < b \sin A$ ist.

Endlich wollen wir noch bemerken, daß die Gleichung (2) sich auch erhalten läßt, wenn man die weiter unten (§. 62) zu erweisende Gleichung

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

in Beziehung auf c auflöst.

Bemerkung.

Wir haben im Vorhergehenden die beiden ersten Aufgaben über die Auflösung des Dreiecks, (wenn eine Seite und zwei Winkel oder zwei Seiten und der der einen gegenüberliegende Winkel gegeben sind), lediglich mit Hilfe des Sinussatzes gewonnen. Dieser Satz reicht aber für die Auflösung der dritten Aufgabe, wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind, nicht aus, da in diesem Falle dem gegebenen Winkel keine der gegebenen Seiten gegenüber liegt. Wir müssen daher für die Auflösung dieser und der vierten Aufgabe (drei Seiten) neue Gleichungen zu bilden suchen, wie dies die folgenden §§. ausführlicher zeigen.

§. 60. Aufgabe.

Wenn von einem Dreiecke ABC, Fig. 19, zwei Seiten b und c und der eingeschlossene Winkel A gegeben sind, die beiden fehlenden Winkel B und C zu berechnen.

Auflösung. Wir berechnen zuerst den Winkel B durch die Gleichung

$$1)\quad \tang B = \frac{b \sin A}{c - b \cos A};$$

dann ist

$$2)\quad C = 180^0 - (A + B).$$

A. Synthetischer Beweis. Wir beschränken uns bei dem synthetischen Beweise dieses Satzes (welcher nur wenig Anwendung findet) auf die einfachste Annahme, daß die Winkel A und B beide spitz sind. Wenn wir dann das aufzulösende Dreieck ABC, Fig. 15, durch das Lot CD in zwei rechtwinklige ACD und BCD zerschneiden, so ist in dem Dreiecke BCD

$$\tang B = \frac{CD}{BD} = \frac{CD}{c - AD}$$

und in dem Dreiecke ACD $CD = b \sin A$, $AD = b \cos A$, folglich, wenn wir diese Werthe in die vorhergehende Gleichung einsetzen,

$$\tang B = \frac{b \sin A}{c - b \cos A}.$$

*B. Analytischer Beweis. In §. 53 und 54 ist ganz allgemein erwiesen

$$a \sin B = b \sin A$$

und

$$a \cos B = c - b \cos A.$$

Dividiren wir die erste Gleichung durch die zweite, so erhalten wir

$$\frac{a \sin B}{a \cos B} = \frac{b \sin A}{c - b \cos A}$$

oder, da sich a im Zähler und Nenner aufhebt und bekanntlich $\frac{\sin B}{\cos B} = \tang B$ ist,

$$\tang B = \frac{b \sin A}{c - b \cos A}.$$

Erstes Beispiel ohne Logarithmen.

Es sei gegeben $b = 10$, $c = 14$, $A = 70^0\ 10'$; dann ist

$$\tang B = \frac{10\ .\ 0{,}9407}{14 - 10\ .\ 0{,}3393} = \frac{9{,}407}{10{,}607} = 0{,}8869,$$

also $B = 41^0\ 34'$ und $C = 180^0 - (A + B) = 68^0\ 16'$.

Zweites Beispiel ohne Logarithmen.

Es sei $b = 8,\ c = 12,\ A = 140^0$.

Da der Winkel A hier ein stumpfer ist und die Tafel nur spitze Winkel enthält, so formen wir zweckmäßiger vor der Ausrechnung die obige Gleichung in folgender Art um. Wir bezeichnen den spitzen Nebenwinkel von A mit α; dann ist bekanntlich

$$\sin A = \sin \alpha,\ \cos A = -\cos \alpha, \text{ also } -\cos A = +\cos \alpha,$$

und die obige Gleichung $\operatorname{tang} B = \frac{b \sin A}{c - b \cos A}$

verwandelt sich daher in: $\operatorname{tang} B = \frac{b \sin \alpha}{c + b \cos \alpha}$.

Hiernach erhalten wir für das angeführte Beispiel die Gleichung

$$\operatorname{tang} B = \frac{8 \sin 40^0}{12 + 8 \cos 40^0} = \frac{8 \,.\, 0,6428}{12 + 8 \,.\, 0,7660} = \frac{5,1424}{18,1280} = 0,2837,$$

also $B = 15^0\ 50'$ und $C = 180^0 - (A + B) = 24^0\ 10'$.

Endlich wollen wir noch bemerken, daß, wenn wir die kleinere der gegebenen Seiten, was offenbar frei steht, mit b, die größere mit c bezeichnen, der Winkel B niemals anders als spitz ausfallen kann, weshalb wir für den Fall, daß B ein rechter oder stumpfer Winkel wird, kein Beispiel hinzufügen.

Wir übergehen ferner Beispiele mit Logarithmen gänzlich, da die Formel

$$\operatorname{tang} B = \frac{b \sin A}{c - b \cos A}$$

wegen des im Nenner vorkommenden Minuszeichens für das Rechnen mit Logarithmen unbequem ist, während wir später eine für diesen Zweck ganz geeignete Formel kennen lernen werden.

§. 61. Zusatz.

Wenn man aus zwei Seiten b und c und dem eingeschlossenen Winkel A eines Dreiecks nach Anleitung des vorhergehenden §. die fehlenden Winkel B und C gefunden hat, so ergibt sich die fehlende Seite a nach dem Sinussatze durch die Gleichung

$$a = \frac{b \sin A}{\sin B}.$$

Der folgende wichtige Lehrsatz aber lehrt uns diese Seite unmittelbar finden, ohne daß vorher die Winkel berechnet worden sind.

§. 62. Lehrsatz.

Das Quadrat einer Dreiecksseite ist gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten, vermindert um das doppelte Product derselben, multiplicirt mit dem Cosinus des von denselben eingeschlossenen Winkels.

Bezeichnen wir also die Seiten eines Dreiecks mit a, b, c und den der Seite a gegenüberliegenden Winkel mit A, so ist

$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.}$$

A. Synthetischer Beweis. Wir haben hier drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem der Winkel A ein spitzer, stumpfer oder rechter ist*). Es sei zunächst Winkel A und auch Winkel B spitz; dann fällt das Lot CD, Fig. 15, innerhalb des Dreiecks ABC. Nun ist in dem rechtwinkligen Dreiecke BCD nach dem pythagoräischen Lehrsatze $a^2 = CD^2 + BD^2$.

---

*) Wir führen hier, abweichend von §. 60, wegen der großen Wichtigkeit der obigen Gleichung auch den synthetischen Beweis um größerer Deutlichkeit willen vollständig für alle möglichen Fälle.

Setzen wir $BD = c - AD$, so verwandelt sich die vorstehende Gleichung in

$$a^2 = CD^2 + (c - AD)^2$$

oder, wenn wir die Klammern auflösen,

$$a^2 = CD^2 + c^2 - 2c \, . \, AD + AD^2.$$

In dem rechtwinkligen Dreiecke ACD ist nach dem pythagoräischen Lehrsatze

$$CD^2 + AD^2 = b^2.$$

Wir können daher die vorhergehende Gleichung auch kürzer so schreiben:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2c \, . \, AD.$$

Nun ist aber in dem rechtwinkligen Dreiecke ACD

$$AD = b \, . \cos A,$$

wonach die zuletzt erhaltene Gleichung übergeht in:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2c \, . \, b \, . \cos A = b^2 + c^2 - 2b \, . \, c \, . \cos A.$$

Sollte der Winkel B ein stumpfer (oder rechter) sein, so ist jedenfalls C spitz und wir werden dann, wenn wir das Lot nicht aus C, sondern aus B fällen, den Beweis ganz ebenso führen können.

Um ferner die Richtigkeit unserer Gleichung darzuthun, wenn der Winkel A, Fig. 16, ein stumpfer ist, ziehen wir aus einer der beiden andern Ecken z. B. aus C auf die gegenüberliegende Seite AB eine Senkrechte CD, welche diesmal die Verlängerung derselben trifft, weil wir Winkel A als stumpf angenommen haben. Nun ist in dem rechtwinkligen Dreiecke BCD

$$a^2 = CD^2 + BD^2$$

oder, da $BD = c + AD$ ist, $a^2 = CD^2 + (c + AD)^2$

$$= CD^2 + c^2 + 2c \, . \, AD + AD^2.$$

Ersetzen wir wieder $CD^2 + AD^2$ durch b^2, so verwandelt sich diese Gleichung in

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2c \, . \, AD.$$

Bezeichnen wir den spitzen Nebenwinkel von A mit α, so erhalten wir aus dem rechtwinkligen Dreiecke ACD $AD = b \cos \alpha$, und wenn wir diesen Werth in die vorhergehende Gleichung einsetzen,

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha.$$

Da der Cosinus eines stumpfen Winkels dem negativen Cosinus des spitzen Nebenwinkels gleich ist, so ist

$$+ \cos A = - \cos \alpha, \text{ also } + \cos \alpha = - \cos A.$$

Hiernach verwandelt sich die zuletzt erhaltene Gleichung in

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Diese nämliche Gleichung gilt also sowohl, wenn der Winkel A spitz, als auch wenn derselbe stumpf ist.

Sie bleibt endlich drittens auch noch richtig, wenn der Winkel A ein rechter ist; sie geht nämlich in diesem Falle, da $\cos A = \cos 90^0 = 0$ ist, einfach in die Gleichung des pythagoräischen Lehrsatzes über $a^2 = b^2 + c^2$.

*B. Analytischer Beweis. Nach §. 53 und 54 ist

$$a \sin B = b \sin A$$

und

$$a \cos B = c - b \cos A,$$

folglich, wenn wir quadriren,

$$a^2 \sin B^2 = b^2 \sin A^2$$

und

$$a^2 \cos B^2 = c^2 - 2bc \cos A + b^2 \cos A^2.$$

Addiren wir diese Gleichungen und ziehen die Glieder, welche einen gleichen Factor haben, zusammen, so erhalten wir weiter:

$$a^2 (\sin B^2 + \cos B^2) = b^2 (\sin A^2 + \cos A^2) + c^2 - 2bc \cos A$$

oder, da bekanntlich $\sin B^2 + \cos B^2 = 1$ und eben so $\sin A^2 + \cos A^2 = 1$ ist,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Zufolge der so eben erwiesenen wichtigen Gleichung, von welcher der pythagoräische Satz der Planimetrie nur ein spezieller Fall ist, ist das Quadrat einer Dreiecksseite, welche einem spitzen Winkel gegenüberliegt, allemal kleiner, dagegen in einem stumpfwinkligen Dreiecke das Quadrat der Seite, welche dem stumpfen Winkel gegenüberliegt, größer als die Summe der Quadrate der beiden andern Seiten; denn wenn Winkel A stumpf ist, so ist cos A negativ, folglich das Glied $-2bc \cos A$ positiv.

Diese Gleichung liefert uns auch den sehr einfachen Beweis für den bereits in der Planimetrie (§. 234) aufgeführten Satz: In jedem Parallelogramm ist die Summe der Quadrate der beiden Diagonalen gleich der Summe der Quadrate der vier Seiten. Bezeichnen wir nämlich in dem Parallelogramm ABCD, Fig. 49, die Diagonalen mit d und c und die Seiten mit a und b, so ist in dem Dreiecke ABD

$$1)\ d^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos A$$

und in dem Dreiecke ABC $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos B$

oder, da $\cos B = -\cos A$, also $-\cos B = +\cos A$ ist,

$$2)\ c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos A.$$

Aus der Addition der Gleichungen (1) und (2) ergibt sich

$$3)\ d^2 + c^2 = 2a^2 + 2b^2.$$

§. 63. Aufgabe.

Wenn von einem Dreiecke zwei Seiten b und c und der eingeschlossene Winkel A gegeben sind, die dritte Seite a zu berechnen.

Auflösung. Nach dem vorhergehenden §. ist

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

folglich

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}.$$

Erstes Beispiel ohne Logarithmen.

Es sei $b = 7$, $c = 10$, $A = 70^0$; dann ist

$$a = \sqrt{49 + 100 - 140 \, . \, 0{,}3420} = \sqrt{149 - 47{,}8800}$$
$$= \sqrt{101{,}12} = 10{,}05.$$

Zweites Beispiel ohne Logarithmen.

Es sei $b = 4$, $c = 6$, $A = 124^0$. Da hier der Winkel A stumpf ist, so bedienen wir uns bequemer der Formel

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha},$$

$$a = \sqrt{16 + 36 + 48 \, . \, 0{,}5592} = \sqrt{52 + 26{,}8416}$$
$$= \sqrt{78{,}8416} = 8{,}88.$$

Wir fügen keine Beispiele mit Logarithmen bei, da die obige Formel für das logarithmische Rechnen offenbar unbequem ist, und wir weiter unten für diesen Zweck ganz geeignete Formeln entwickeln werden. Wir bemerken jedoch noch für Leser, welche sich viel mit trigonometrischen Rechnungen zu beschäftigen haben, daß jene Formel gerade dann wieder die meiste Bequemlichkeit gewährt, wenn die Seiten b und c nicht unmittelbar, sondern ihre Logarithmen, was bei trigonometrischen Rechnungen nicht selten der Fall ist, gegeben sein sollten, besonders wenn man dieser Gleichung folgende Form gibt:

$$a = c \sqrt{1 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 - 2 \, . \, \frac{b}{c} \, . \cos A.}$$

Durch die Gleichung des §. 62 werden wir auch in den Stand gesetzt, die vierte Aufgabe (drei Seiten) zu lösen, wie dies der folgende §. zeigt.

§. 64. Aufgabe.

Wenn von einem Dreiecke ABC, Fig. 19, die drei Seiten gegeben sind, die Winkel des Dreiecks zu berechnen.

Auflösung. Wie wir in §. 62 gesehen haben, ist

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich leicht weiter:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$
$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$
$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Die vorstehenden Gleichungen lassen sich in Worten also aussprechen: Der Cosinus eines Winkels im Dreiecke wird erhalten, wenn man von der Summe der Quadrate der einschließenden Seiten das Quadrat der gegenüberliegenden Seite subtrahirt und die erhaltene Differenz durch das doppelte Product der einschließenden Seiten dividirt.

Beispiel ohne Logarithmen.

Es sei $a = 6$, $b = 8$, $c = 13$; dann ist

$$\cos A = \frac{64 + 169 - 36}{208} = \frac{197}{208} = 0{,}9471,$$

folglich $$A = 18^0\ 43'$$

$$\cos B = \frac{36 + 169 - 64}{156} = \frac{141}{156} = 0{,}9038,$$

folglich $$B = 25^0\ 20'$$

$$\cos C = \frac{36 + 64 - 169}{96} = \frac{-69}{96} = -0{,}7187.$$

Da hiernach cos C negativ ist, so ist Winkel C stumpf und folglich sein Cosinus gleich dem negativen Cosinus des spitzen Nebenwinkels. Nun ist $+ 0{,}7187$ der Cosinus von $44^0\ 3'$, also $C = 180^0 - 44^0\ 3' = 135^0\ 57'$.

Wir hätten auch nach Berechnung des Winkels A den Winkel B nach dem Sinussatze berechnen und dann, um C zu finden, die Summe $A + B$ von 180^0 subtrahiren können. Das angewendete Verfahren aber liefert uns eine leichte Probe für die Richtigkeit unserer Rechnung, da die Summe $A + B + C = 180^0$ ist.

Wir fügen keine Beispiele mit Logarithmen bei, da die obige Gleichung für diesen Zweck unbequem ist, und wir weiter unten (§. 68) für das logarithmische Rechnen ganz geeignete Formeln kennen lernen werden.

Bemerkung.

Die vorhergehenden Entwicklungen haben uns in den Stand gesetzt, das Dreieck in allen vier Fällen aufzulösen. Wir haben jedoch nur für die Auflösung der ersten und zweiten Aufgabe (§§. 56 und 57) solche Gleichungen

erhalten, bei denen sich die Logarithmen bequem anwenden lassen. Dagegen sind die Formeln, welche die Auflösung der dritten und vierten Aufgabe liefern (§§. 60, 63 und 64), für den practischen Gebrauch der Logarithmen unbequem. Die nächstfolgenden Sätze werden uns mit solchen Gleichungen bekannt machen, welche die Auflösung der beiden letzten Aufgaben in Formeln ausdrücken, die für das logarithmische Rechnen ganz geeignet sind.

§. 65. Lehrsatz.

In jedem Dreiecke verhalten sich die Summe und die Differenz zweier Seiten wie die Tangenten der halben Summe und der halben Differenz der gegenüberliegenden Winkel, also, wenn wir die halbe Summe der den Seiten a und b gegenüberliegenden Winkel $\frac{A + B}{2}$ mit σ und die halbe Differenz derselben $\frac{A - B}{2}$ mit ϑ bezeichnen,

$$\mathbf{a + b : a - b = tang\, \sigma : tang\, \vartheta.}$$

A. *Synthetischer Beweis.* Wenn wir mit der kleineren Seite AC = b, Fig. 20, um die Spitze C einen Kreis beschreiben, welcher die größere Seite BC = a in D und ihre Verlängerung in F schneidet, ferner A mit F und D verbinden und durch B mit AD eine Parallele ziehen, welche die verlängerte AF in G trifft, so ist zunächst Winkel FAD, als Winkel im Halbkreise, ein rechter, folglich auch Winkel G = 90°; ferner ist Centriwinkel ACF, als Außenwinkel des Dreiecks ABC, = A + B, daher der mit ihm auf dem nämlichen Bogen AF stehende Peripheriewinkel ADC $= \frac{A + B}{2} = \sigma$, also auch FBG = σ. Wenn wir endlich noch den Punkt E, in welchem der um C beschriebene Kreis die Grundlinie AB zum zweitenmale schneidet, mit C verbinden, so ist Winkel A (BAC) = AEC = B + ECB, also Centriwinkel ECB = A — B und folglich der mit ihm auf dem nämlichen Bogen DE stehende Peripheriewinkel DAE $= \frac{A - B}{2} = \vartheta$, daher auch ABG = ϑ.

Nun ist in den rechtwinkligen Dreiecken AGB und FGB

$$\text{tang}\, \vartheta = \frac{AG}{BG} \text{ und } \text{tang}\, \sigma = \frac{FG}{BG},$$

folglich, da sich Brüche mit gleichem Nenner wie ihre Zähler verhalten,

$$\text{tang}\, \vartheta : \text{tang}\, \sigma = AG : FG.$$

Da AD || BG ist, so verhält sich

$$AG : FG = BD : BF,$$

also auch

$$\text{tang}\, \vartheta : \text{tang}\, \sigma = BD : BF.$$

Zufolge der Construction ist BD = BC — AC = a — b und BF = BC + AC = a + b. Setzen wir diese Werthe in die zuletzt erhaltene Proportion ein, so verwandelt sich dieselbe in:

$$\text{tang}\, \vartheta : \text{tang}\, \sigma = a - b : a + b.$$

*B. *Analytischer Beweis.* Nach §. 53 verhält sich

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{a}{b},$$

folglich auch

$$\frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} = \frac{a - b}{a + b},$$

Da wir $\frac{A+B}{2} = \sigma$ und $\frac{A-B}{2} = \vartheta$

gesetzt haben, so ist $A = \sigma + \vartheta$ und $B = \sigma - \vartheta$,
folglich nach §. 33 $\sin A - \sin B = 2 \cos \sigma \sin \vartheta$
und $\sin A + \sin B = 2 \sin \sigma \cos \vartheta$

Setzen wir diese Werthe in die obige Gleichung ein, so erhalten wir

$$\frac{2 \cos \sigma \sin \vartheta}{2 \sin \sigma \cos \vartheta} = \frac{a-b}{a+b}.$$

Bekanntlich ist $\frac{\cos \sigma}{\sin \sigma} = \text{cotg}\ \sigma$ und $\frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} = \text{tang}\ \vartheta$; hiernach verwandelt sich die vorhergehende Gleichung in:

$$\text{cotg}\ \sigma \,.\, \text{tang}\ \vartheta = \frac{a-b}{a+b}$$

oder, da wir statt mit cotg σ zu multipliciren auch durch tang σ dividiren können,

$$\frac{\text{tang}\ \vartheta}{\text{tang}\ \sigma} = \frac{a-b}{a+b}.$$

§. 66. Zusatz.

Die Gleichung des vorhergehenden §. $\text{tang}\ \vartheta : \text{tang}\ \sigma = a - b : a + b$, welcher man auch den Namen des Tangentensatzes beizulegen pflegt, gibt uns ein bei Anwendung der Logarithmen bequemes Mittel, wenn von einem Dreiecke zwei Seiten a und b und der eingeschlossene Winkel C gegeben sind, die fehlenden Winkel A und B zu berechnen. Da nämlich der Winkel C gegeben ist, so ist auch die Summe der beiden andern Winkel $A + B = 180^0 - C$ und also auch ihre halbe Summe, welche wir mit σ bezeichnen, bekannt, nämlich

$$1)\quad \sigma = \frac{180^0 - C}{2}.$$

Wir finden nun die halbe Differenz der fehlenden Winkel, welche wir mit ϑ bezeichnen, durch die Gleichung

$$2)\quad \text{tang}\ \vartheta = \frac{(a-b)\,\text{tang}\ \sigma^{*)}}{a+b}.$$

Ist aber hieraus ϑ gefunden, so ist, (wie Fig. 20 deutlich zeigt),

$$3)\quad A = \sigma + \vartheta \text{ und } B = \sigma - \vartheta.$$

Hat man auf diese Art die Winkel A und B berechnet, so kann man auch die fehlende Seite c leicht nach dem Sinussatze finden durch die Gleichung

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A} \text{ oder } c = \frac{b \sin C}{\sin B}.$$

Beispiel mit Logarithmen.

Es sei $a = 618{,}4$, $b = 504{,}6$, $C = 100^0\ 28'$; dann ist $a + b = 1123$, $a - b = 113{,}8$ und $\sigma = 39^0\ 46'$. Wir finden nun ϑ durch folgende Rechnung:

$$\begin{aligned}
\log (a-b) &= 2{,}05614 \\
+ \log \text{tang}\ \sigma &= 9{,}92022 - 10 \\
&\overline{\ 11{,}97636 - 10\ } \\
- \log (a+b) &= 3{,}05038 \\
\log \text{tang}\ \vartheta &= \overline{\ 8{,}92598 - 10\ } \\
\vartheta &= 4^0\ 49'\ 13''.
\end{aligned}$$

$$A = \sigma + \vartheta = 44^0\ 35'\ 13''$$

$$B = \sigma - \vartheta = 34^0\ 56'\ 47''$$

$$c = 686{,}26$$

---

*) Man lese: tang ϑ verhält sich zu a — b wie tang σ zu a + b.

Für solche Leser, welche sich viel mit trigonometrischen Rechnungen zu beschäftigen haben, bemerken wir noch Folgendes:

Um aus zwei Seiten a und b und dem eingeschlossenen Winkel C die fehlende Seite c durch die möglichst kürzeste Rechnung zu erhalten, kann man in nachstehender Art verfahren. Wenn wir in Fig. 20 die gesuchte Seite AB mit c, ferner AG mit u, BG mit v bezeichnen und uns durch D mit AG eine Parallele gezogen denken, welche BG im Punkte K durchschneidet, so ist auch DK = u, folglich in den rechtwinkligen Dreiecken DKB und FGB

$$u = (a - b). \sin \sigma \text{ und } v = (a + b) \cos \sigma.$$

Ferner in dem rechtwinkligen Dreiecke ABG

$$\operatorname{tang} \vartheta = \frac{u}{v} \text{ und } c = \frac{v}{\cos \vartheta}.$$

Hiernach ist für das obige Beispiel die Rechnung folgende:

$\log (a - b) =$	$2{,}05614$	$\log (a + b) =$	$3{,}05038$
$+ \log \sin \sigma =$	$9{,}80595 - 10$	$+ \log \cos \sigma =$	$9{,}88573 - 10$
$\log u =$	$11{,}86209 - 10$	$\log v =$	$12{,}93611 - 10$
$- \log v =$	$2{,}93611$	$- \log \cos \vartheta =$	$9{,}99846 - 10$
$\log \operatorname{tang} \vartheta =$	$8{,}92598 - 10$	$\log c =$	$2{,}93765$
$\vartheta =$	$4^0\ 49'\ 13''$	$c =$	$866{,}26.$

Bemerkung.

Wir haben nun noch eine für das logarithmische Rechnen bequeme Formel für die Aufgabe aufzusuchen, wenn von einem Dreiecke alle drei Seiten gegeben sind und die Winkel berechnet werden sollen. Wir werden die Auflösung dieser Aufgabe in einer sehr einfachen Weise gewinnen, wenn wir derselben den folgenden Satz vorausschicken*).

§. 67. Lehrsatz.

Wenn wir den halben Umfang eines Dreiecks, dessen Seiten a, b und c sind, mit p bezeichnen, so ist der Radius des in das Dreieck beschriebenen Kreises

$$\rho = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

Beweis. Berührt der in das Dreieck ABC, Fig. 28, beschriebene Kreis die Seiten desselben in D, E und F, so ist nach einem bekannten Satze der Planimetrie (§. 130)

$$AD = AF, \; BD = BE, \; CE = CF.$$

Nun bleibt AD + AF übrig, wenn wir von dem ganzen Umfange des Dreiecks 2p die Stücke BD, BC und CF oder, da BD + CF = BC ist, 2BC wegnehmen; mithin ist

$$AD + AF = 2p - 2a, \text{ also } AD = AF = p - a.$$

Eben so ist $BD = BE = p - b$

und $CE = CF = p - c.$

Da die Winkel A, B, C des Dreiecks ABC durch die Linien AM, BM, CM (nach §. 130 der Planim.) halbirt sind, so ist ferner in den entstandenen

---

*) Dieser Satz gehört eigentlich in das folgende von Kreisrechnungen handelnde Capitel, also nicht hierher; daß wir denselben dennoch hier einschalten, hat darin seinen Grund, daß die Logarithmentafel ein nur dem praktischen Bedürfnisse, nicht aber der Systematik Folge leistender Rechenknecht ist.

rechtwinkligen Dreiecken ADM, BDM und CEM

$$p - a = \rho \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}A,$$

$$p - b = \rho \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}B$$

und

$$p - c = \rho \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}C.$$

Addiren wir diese Gleichungen, und erwägen wir zugleich, daß

$$(p - a) + (p - b) + (p - c) = 3p - (a + b + c) = 3p - 2p = p$$

ist, so erhalten wir

$$1)\ p = \rho\,(\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}A + \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}B + \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}C).$$

Multipliciren wir jene Gleichungen, so bekommen wir

$$2)\ (p - a)(p - b)(p - c) = \rho^3 \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}A \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}B \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}C.$$

Da $\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}C = 90^0$ ist, so ist nach §. 37

$$\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}A + \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}B + \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}C = \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}A \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}B \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}C.$$

Dividiren wir daher Gleichung (2) durch (1), so ergibt sich

$$3)\ \frac{(p - a)(p - b)(p - c)}{p} = \rho^2$$

und folglich 4)

$$\rho = \sqrt{\frac{(p - a)(p - b)(p - c)}{p}}.$$

§. 68, a. Zusatz.

Wenn wir die Bezeichnung des vorherg. §. beibehalten, so ist

$$\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{p\,(p - a)}{(p - b)(p - c)}}.$$

Beweis. In dem rechtwinkligen Dreiecke ADM, Fig. 28, ist

$$\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}A = \frac{AD}{DM} = \frac{p - a}{\rho}.$$

Setzen wir den im vorherg. §. für ρ erhaltenen Werth ein, (indem wir statt durch ρ zu dividiren mit der Reciproke von ρ multipliciren), so erhalten wir

$$1)\ \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}A = (p - a)\sqrt{\frac{p}{(p - a)(p - b)(p - c)}};$$

und wenn wir den vor dem Wurzelzeichen stehenden Faktor $p - a$ unter dasselbe bringen, (indem wir $p - a = \sqrt{(p - a)^2}$ setzen), so ergibt sich

$$2)\ \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{p\,(p - a)}{(p - b)(p - c)}}.$$

Die so eben erhaltene Gleichung kann auch auf die folgende Art abgeleitet werden, welche uns noch mit andern für die logarithmische Berechnung eines Winkels aus den drei Seiten mehr oder weniger geeigneten Formeln bekannt machen wird.

Nach §. 30, b ist $\quad 2 \cos \tfrac{1}{2}A^2 = 1 + \cos A,$

und nach §. 64 ist $\quad \cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$

folglich

$$2 \cos \tfrac{1}{2}A^2 = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(b + c)^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b + c + a)\,.\,(b + c - a)}{2bc}$$

(vermöge der bekannten Formel $u^2 - v^2 = (u + v) \cdot (u - v)$). — Ersetzen wir $b + c + a$ durch $2p$ und $b + c - a$ durch $2p - 2a = 2(p - a)$, so verwandelt sich die zuletzt erhaltene Gleichung in

$$2 \cos \tfrac{1}{2}A^2 = \frac{4p(p-a)}{2bc},$$

woraus sich $\quad 1) \cos \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$

ergibt. — Weiter ist nach §. 30, b

$$2 \sin \tfrac{1}{2}A^2 = 1 - \cos A,$$

also, wenn wir wieder cos A nach §. 64 ausdrücken,

$$2 \sin \tfrac{1}{2}A^2 = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc}$$

$$= \frac{a^2 - (b^2 + c^2 - 2bc)}{2bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc},$$

wofür wir nach der bekannten Formel $u^2 - v^2 = (u + v) \cdot (u + v)$ auch setzen können:

$$2 \sin \tfrac{1}{2}A^2 = \frac{(a + b - c) \cdot (a - (b - c))}{2bc} = \frac{(a + b - c) \cdot (a + c - b)}{2bc}.$$

Nach der Annahme ist $a + b + c = 2p$, folglich $a + b - c = 2p - 2c = 2(p - c)$ und $a + c - b = 2p - 2b = 2(p - b)$. Setzen wir diese Werthe in die letzte Gleichung ein, so verwandelt sich dieselbe in

$$2 \sin \tfrac{1}{2}A^2 = \frac{4(p-b)(p-c)}{2bc},$$

also $\quad 2) \sin \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}.$

Dividiren wir die Gleichung (1) durch (2), so erhalten wir die Gleichung des Haupttextes

$$3) \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b) \cdot (p-c)}}.$$

Zufolge §. 30, b ist $\quad \sin A = 2 \sin \tfrac{1}{2}A \cos \tfrac{1}{2}A$;

setzen wir in diese Gleichung die unter (1) und (2) gefundenen Werthe ein, so bekommen wir endlich noch

$$4) \sin A = \frac{2}{bc} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Die unter (1), (2) und (4) neu gewonnenen Formeln stehen jedoch an praktischer Brauchbarkeit der unter (3) aufgeführten Formel nach. Die wenigste Bequemlichkeit für die Rechnung gewährt die Formel (4), da sie das Aufschlagen der meisten Logarithmen erfordert; überdies bleibt es nach derselben unentschieden, ob der Winkel A, wenn er der größten Seite gegenüberliegt, spitz oder stumpf ist. Die Formel (1) gewährt, wenn der Winkel $\tfrac{1}{2}A$ klein ist, und die Formel (2), wenn derselbe sich einem Rechten nähert, nur einen geringen Grad von Genauigkeit, da im ersteren Falle der Cosinus, im anderen der Sinus sich nur langsam ändert, während die Aenderungen der Tangente und folglich auch der Cotangente allemal beträchtlich und größer als die gleichzeitigen Aenderungen des Sinus und des Cosinus sind.

§. 68, b. Zusatz.

So wie wir im vorhergehenden §. die Gleichung

$$\cot g\ \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{p\,(p-a)}{(p-b)\,(p-c)}},$$

welcher wir den Namen der Cotangentenformel beilegen, erwiesen haben, so lassen sich auch die Gleichungen

$$\cot g\ \tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{p\,(p-b)}{(p-a)\,(p-c)}}$$

und

$$\cot g\ \tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{p\,(p-c)}{(p-a)\,(p-b)}}$$

als richtig darthun. Nach diesen Gleichungen können die Winkel eines Dreiecks, dessen Seiten gegeben sind, bequem mit Hilfe der Logarithmentafel berechnet werden.

Es sei z. B. gegeben $a = 819$, $b = 516$, $c = 925$; dann ist
$p = 1130$, $p - a = 311$, $p - b = 614$, $p - c = 205$.

Wir erhalten nun zunächst den Winkel A durch die folgende Rechnung:

$$\begin{aligned} \log p &= 3{,}05308 \\ +\log(p-a) &= \underline{2{,}49276} \\ & \ 5{,}54584 \\ & -\ \underline{5{,}09992} \\ 2)\ & \ 0{,}44592 \\ \log \cot g\ \tfrac{1}{2}A &= 0{,}22296 \\ \tfrac{1}{2}A &= 30^0\ 54', \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log(p-b) &= 2{,}78817 \\ +\log(p-c) &= \underline{2{,}31175} \\ & \ 5{,}09992 \end{aligned}$$

$A = 61^0\ 48'$.

Eben so ergibt sich $B = 33^0\ 44'$

und $C = 84^0\ 28'$.

Wenn die Aufgabe nicht blos dahin gestellt ist, einen Winkel des Dreiecks zu finden, sondern wenn alle drei Winkel berechnet werden sollen, so gewinnt man noch an Bequemlichkeit, wenn man sich bei der Berechnung des Winkels A der in §. 68,a unter (1) aufgeführten Formel

$$\cot g\ \tfrac{1}{2}A = (p-a)\sqrt{\frac{p}{(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}}$$

bedient und bei der Berechnung der Winkel B und C die dieser analogen Formeln

$$\cot g\ \tfrac{1}{2}B = (p-b)\sqrt{\frac{p}{(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}}$$

und

$$\cot g\ \tfrac{1}{2}C = (p-c)\sqrt{\frac{p}{(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}}$$

anwendet, (in denen zufolge §. 67 der Wurzelausdruck die Reciproke von ρ ist).

Bemerkung.

Während wir im Vorhergehenden gesehen haben, wie aus drei gegebenen Stücken, Seiten oder Winkeln, welche das Dreieck bestimmen, die fehlenden Winkel oder Seiten gefunden werden, fügen wir nun noch hinzu, wie sich aus jenen Stücken der Inhalt des Dreiecks berechnen läßt.

§. 69. Lehrsatz.

Der Inhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Producte zweier Seiten, multiplicirt mit dem Sinus des eingeschlossenen Winkels, in Zeichen

$$J = \frac{1}{2}bc \sin A.$$

Beweis. Bezeichnen wir die Höhe CD des Dreiecks ABC, Fig. 15, 16 und 17, mit h, so ist bekanntlich

$$J = \frac{1}{2}c \cdot h.$$

Weiter ist aber, es mag nun A ein spitzer, stumpfer oder rechter Winkel sein, (wie wir in §. 53 ausführlich gezeigt haben), allemal

$$h = b \sin A,$$

folglich $$J = \frac{1}{2}c \cdot b \cdot \sin A = \frac{1}{2}bc \sin A.$$

Wir fügen für diese und die folgende Aufgabe kein Beispiel in bestimmten Zahlen bei, weil die Ausrechnung nicht die mindeste Schwierigkeit darbietet, auch diese beiden Aufgaben in praktischer Hinsicht eine geringere Wichtigkeit als die dritte besitzen.

§. 70. Zusatz.

Sind b und c zwei zusammenstoßende Seiten eines Parallelogramms und ist A der von denselben eingeschlossene Winkel, so ist der Inhalt desselben

$$J = bc \sin A.$$

Ist das Parallelogramm ein Rechteck, also $A = 90^0$ und folglich $\sin A = 1$, so verwandelt sich diese Gleichung in die bekannte Formel für den Inhalt des Rechtecks

$$J = b \cdot c.$$

Denken wir uns zwei Dreiecke, welche einen gleichen Winkel A haben, und bezeichnen wir die diesen Winkel einschließenden Seiten für das eine Dreieck mit b und c, für das andere mit b′ und c′, ferner den Inhalt des ersteren mit J, des anderen mit J′, so ist

$$J = \frac{1}{2}bc \sin A \text{ und } J' = \frac{1}{2}b'c' \sin A,$$

folglich $$J : J' = bc : b'c'.$$

Diese Formel spricht den bekannten geometrischen Satz aus: Wenn zwei Dreiecke einen gleichen Winkel haben, so verhalten sich ihre Inhalte wie die Producte der einschließenden Seiten. (Planim. §. 217).

Da der Sinus des stumpfen Winkels gleich dem Sinus des spitzen Nebenwinkels ist, so folgt aus der Formel des vorhergehenden §. auch noch der Satz, daß zwei Dreiecke gleichen Inhalt haben, wenn sie in zwei Seiten übereinstimmen und die eingeschlossenen Winkel sich zu einem Flachen ergänzen.

Lassen wir von den folgenden Stücken: zwei Seiten b, c und dem eingeschlossenen Winkel A, eine Seite b wachsen, während c und A ungeändert bleiben, so nimmt zufolge der obigen Formel unbedingt auch der Inhalt des Dreiecks zu. Lassen wir dagegen den Winkel A wachsen, ohne die Größe der Seiten b und c zu ändern, so wächst der Inhalt nur so lange, bis der Winkel A gleich einem rechten wird; von da ab nimmt derselbe eben so wieder ab, wie er vorher gewachsen ist.

§. 71. Aufgabe.

Den Inhalt J eines Dreiecks zu berechnen, wenn eine Seite desselben a und zwei Winkel A und B, (also auch der dritte C) gegeben sind.

Auflösung. $J = \frac{a^2 . \sin B . \sin C}{2 \sin A}$.

Beweis. Wenn wir in der bekannten Gleichung

$$J = \frac{h . c}{2}$$

$$h = a \sin B \text{ und } c = \frac{a \sin C}{\sin A}$$ setzen,

so verwandelt sich dieselbe in

$$J = \frac{a^2 . \sin B \sin C}{2 \sin A}.$$

§. 72. Zusatz.

Bezeichnen wir zwei gleichliegende Seiten zweier Dreiecke, welche einander ähnlich sind und daher in den Winkeln A, B und C übereinstimmen, mit a und a', ihre Inhalte mit J und J', so ist

$$J = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A} \text{ und } J' = \frac{a'^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}$$

folglich $J : J' = a^2 : a'^2$,

d. h. die Inhalte ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate gleichliegender Seiten. Die Trigonometrie liefert uns also einen sehr einfachen Beweis dieses wichtigen Satzes der Planimetrie (§. 218).

§. 73. Aufgabe.

Den Inhalt eines Dreiecks zu berechnen, wenn die drei Seiten a, b und c gegeben sind.

Auflösung. $J = \sqrt{p\ (p-a)\ (p-b)\ (p-c)}$,
wo wir der Kürze wegen den halben Umfang des Dreiecks mit p bezeichnet haben.

Beweis. Wenn wir in das Dreieck ABC, Fig. 28, einen Kreis beschreiben und den Mittelpunkt M mit den Ecken des Dreiecks verbinden, so wird dasselbe in drei Dreiecke AMB, BMC und CMA zerschnitten. Bezeichnen wir den Radius des in das Dreieck beschriebenen Kreises mit ρ, so sind die Inhalte dieser Dreiecke gleich

$$\tfrac{1}{2}c\rho,\ \tfrac{1}{2}a\rho \text{ und } \tfrac{1}{2}b\rho$$

und folglich ist der Inhalt des ganzen Dreiecks

$$J = \tfrac{1}{2}(a+b+c)\rho = p\rho.$$

In §. 67 fanden wir $\rho = \sqrt{\frac{(p-a)\ (p-b)\ (p-c)}{p}}$.

Setzen wir diesen Werth in die vorhergehende Gleichung ein, (und bringen wir zugleich den Faktor p unter das Wurzelzeichen, indem wir $p = \sqrt{p^2}$ setzen), so ergibt sich $J = \sqrt{p(p-a)\ (p-b)\ (p-c)}$.

Es sei gegeben	$a = 739$,
	$b = 648$
und	$c = 572$;
dann ist	$2p = 1959$,

folglich $p = 979{,}5$ $\qquad \log p = 2{,}99100$

$p - a = 240{,}5$ $\qquad + \log (p - a) = 2{,}38112$

$p - b = 331{,}5$ $\qquad + \log (p - b) = 2{,}52048$

$p - c = 407{,}5$ $\qquad + \log (p - c) = 2{,}61013$

$2 \mid 10{,}50273$

$\log J = 5{,}25136$

$J = 178388.$

Die Formel $\qquad J = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

kann auch erhalten werden, wenn man die in §. 69 und 68,a aufgeführten Gleichungen

$$J = {}^1/_2 bc \sin A$$

und $\qquad \sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

mit einander multiplicirt. Endlich ist klar, daß es auch möglich sein muß, diese Formel, da in derselben keine Winkel vorkommen, auf rein algebraischem Wege abzuleiten, wie dies in §. 271, c der Planimetrie gezeigt ist.

Wenn wir in der obigen Formel statt p seinen Werth ${}^1/_2\,(a + b + c)$ einsetzen, so verwandelt sich dieselbe in

$$J = \sqrt{\tfrac{1}{2}(a+b+c)\cdot\tfrac{1}{2}(a+b-c)\cdot\tfrac{1}{2}(a-b+c)\cdot\tfrac{1}{2}(-a+b+c)}$$
$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-(a-b))}$$
$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{((a+b)^2-c^2)(c^2-(a-b)^2)}.$$

Der zuletzt erhaltene Ausdruck stellt uns, wenn wir der Kürze wegen c als die Grundlinie, a und b als die Seiten des Dreiecks bezeichnen, recht klar vor Augen, daß in jedem Dreiecke die Grundlinie kleiner als die Summe, aber größer als die Differenz der Seiten ist. Denken wir uns, daß von einem Dreiecke die Grundlinie und die Seitensumme $a + b$ gegeben, die Größe der Seiten a und b selbst aber unbestimmt gelassen ist, so ist der erste Factor $(a + b)^2 - c^2$ constant; der andere Factor $c^2 - (a - b)^2$ aber und ebenso der Inhalt des Dreiecks wird um so größer, je kleiner die Differenz der Seiten $a - b$ ist, und am größten, wenn diese Differenz verschwindet. Es ergibt sich hieraus der Satz, daß von allen Dreiecken, welche in der Grundlinie und der Summe der Seiten übereinstimmen, das gleichschenklige den größten Inhalt hat, woraus dann leicht geschlossen werden kann, daß von allen Dreiecken mit gleichem Umfange dem gleichseitigen der größte Inhalt zukommt.

§. 74. Aufgabe.

Den Inhalt eines Dreiecks ABC, Fig. 19, zu berechnen, wenn zwei Seiten a und b und der der einen gegenüberliegende Winkel A gegeben sind.

Auflösung. Man suche zunächst nach §. 57 den Winkel B durch die Gleichung $\qquad 1)\ \sin B = \frac{b \sin A}{a};$

dann ist $\qquad 2)\quad C = 180^0 - (A + B)$

und nach §. 69 der gesuchte Inhalt

$\qquad 3)\quad J = {}^1/_2 ab \sin C.$

Da die Gleichung (1) zwei Werthe für den Winkel B ergeben kann, so erhält in diesem Falle natürlich auch J zwei verschiedene Werthe. (S. oben §. 58.)

Uebungsbeispiele

a) ohne Logarithmen.

	Gegeben.	Gesucht.
1)	a = 12, A = 44° 20′, B = 77° 10′	C = 58° 30′, b = 16,74, c = 14,64
2)	a = 15, A = 35° 40′, B = 63° 30′	C = 80° 50′, b = 23,02, c = 25,39
3)	a = 25, A = 22° 40′, B = 50° 45′	C = 106° 35′, b = 50,23, c = 62,17
4)	b = 10, A = 86° 45′, C = 18° 35′	B = 74° 40′, a = 10,35, c = 3,30
5)	b = 42, B = 50° 10′, C = 20° 50′	A = 109°, a = 51,71, c = 19,45
6)	b = 28, A = 46° 12′, B = 71° 8′	C = 62° 40′, a = 21,36, c = 26,29
7)	c = 22, A = 117° 40′, B = 50° 30′	C = 11° 50′, a = 95, b = 82,77
8)	c = 30, A = 42° 20′, C = 25° 55′	B = 111° 45′, a = 46,22, b = 63,75
9)	c = 41, B = 100°, C = 36° 10′	A = 43° 50′, a = 48,12, b = 68,42
10)	a = 25, b = 31, B = 50° 40′	A = 38° 36′, C = 90° 44′, c = 40,07
11)	a = 27, b = 16, B = 20° 10′	A_I = 35° 35′, C_I = 124° 15′, c_I = 38,36 A_{II} = 144° 25′, C_{II} = 15° 25′, c_{II} = 12,33
12)	a = 19, c = 12, A = 60° 50′	C = 33° 28′, B = 85° 42′, b = 21,70
13)	a = 12, c = 13, A = 50° 50′	C_I = 57° 8′, B_I = 72° 2′, b_I = 14,72 C_{II} = 122° 52′, B_{II} = 6° 18′, b_{II} = 1,70
14)	b = 29, c = 35, C = 78° 40′	B = 54° 20′, A = 47°, a = 26,11
15)	b = 36, c = 25, C = 40° 20′	B_I = 68° 45′, A_I = 70° 55′, a_I = 36,50 B_{II} = 111° 15′, A_{II} = 28° 25′, a_{II} = 18,38
16)	b = 7, c = 9, A = 60° 30′	B = 47° 39′, C = 71° 51′, a = 8,24
17)	b = 8, c = 11, A = 67° 20′	B = 43°, C = 69° 40′ a = 10,82
18)	b = 3, c = 7, A = 20° 15′	B = 13° 56′, C = 145° 49′, a = 4,31
19)	a = 15, b = 22, C = 71° 5′	A = 39° 38′, B = 69° 17′, c = 22,25
20)	a = 24, b = 17, C = 65°	A = 72° 30′, B = 42° 30′, c = 22,81
21)	a = 20, b = 7, C = 24° 15′	A = 143° 50′, B = 11° 55′, c = 13,92
22)	a = 9, c = 14, B = 70° 20′	A = 37° 41′, C = 71° 59′, b = 13,86
23)	a = 11, c = 19, B = 31° 10′	A = 30° 42′, C = 118° 8′, b = 11,15
24)	a = 15, c = 26, B = 27°	A = 28° 19′, C = 124° 41′, b = 14,36
25)	a = 7, b = 8, c = 9	A = 48° 11′, B = 58° 25′, C = 73° 24′
26)	a = 20, b = 23, c = 16	A = 58° 27′, B = 78° 33′, C = 43°
27)	a = 26, b = 21, c = 19	A = 80° 55′, B = 52° 54′, C = 46° 11′
28)	a = 17, b = 22, c = 30	A = 33° 57′, B = 46° 17′, C = 99° 46′
29)	a = 28, b = 48, c = 31	A = 33° 31′, B = 108° 47′, C = 37° 42′
30)	a = 34, b = 23, c = 18	A = 111° 28′, B = 39° 1′, C = 29° 31′

b) mit Logarithmen.

	Gegeben.	Gesucht.
1)	a = 1506, A = 50° 13′, B = 72° 51′	C = 56° 56′, b = 1872,6, c = 1642,3
2)	a = 3378, A = 118° 24′, B = 37° 11′	C = 24° 25′, b = 2320,8, c = 1587,4
3)	a = 716,3, B = 15° 46′, C = 109° 23′	A = 54° 51′, b = 238,03, c = 826,38
4)	b = 738,9, A = 66° 17′, B = 40° 35′	C = 73° 8′, a = 1039,9, c = 1087
5)	b = 971,6, A = 85° 18′, C = 32° 19′	B = 62° 23′, a = 1092,8, c = 586,2
6)	b = 2517, B = 16° 27′, C = 45° 29′	A = 118° 4′, a = 7843,2, c = 6337,9
7)	c = 316,4, A = 67° 49′, B = 20° 25′	C = 91° 46′, a = 293,12, b = 110,43
8)	c = 2845, A = 18° 19′, C = 151° 7′	B = 10° 34′, a = 1851, b = 1080,1
9)	c = 203,4, B = 124° 37′, C = 35° 6′	A = 20° 17′, a = 122,63, b = 291,11
10)	a = 3019, b = 2075, A = 70° 27′	B = 40° 22′, C = 69° 11′, c = 2994,5
11)	a = 4224, b = 6097, A = 23° 13′	B_I = 34° 41′, C_I = 122° 6′, c_I = 9077 B_{II} = 145° 19′, C_{II} = 11° 28′, c_{II} = 2130,1
12)	a = 3156, b = 5278,5, B = 50° 36′	A = 27° 31′, C = 101° 53′, c = 6684,5

13) $a = 35{,}46,\ b = 27{,}682,\ B = 40^0\ 25'$	$A_I = 56^0\ 9',\ C_I = 83^0\ 26',\ c_I = 42{,}417$ $A_{II} = 123^0\ 51',\ C_{II} = 15^0 44',\ c_{II} = 11{,}578$
14) $a = 7017{,}7,\ c = 5695,\ A = 65^0\ 32'$	$C = 47^0\ 37',\ B = 66^0\ 51',\ b = 7089{,}1$
15) $a = 5039{,}9,\ c = 6294,\ A = 43^0\ 24'$	$C_I = 59^0\ 6',\ B_I = 77^0\ 30',\ b_I = 7161{,}3$ $C_{II} = 120^0 54',\ B_{II} = 15^0 42',\ b_{II} = 1984{,}9$
16) $a = 604{,}6,\ c = 719{,}6,\ C = 50^0\ 23'$	$A = 40^0\ 20',\ B = 89^0\ 17',\ b = 934{,}07$
17) $b = 2017,\ c = 1846,\ C = 60^0\ 27'$	$B_I = 71^0 54',\ A_I = 47^0 39',\ a_I = 1568{,}3$ $B_{II} = 108^0 6',\ A_{II} = 11^0 27',\ a_{II} = 421{,}25$
18) $b = 819{,}4,\ c = 605{,}89,\ B = 58^0 12'$	$C = 38^0\ 56',\ A = 82^0\ 52',\ a = 956{,}68$
19) $a = 4652,\ b = 4062,\ C = 54^0\ 20'$	$A = 70^0\ 21',\ B = 55^0\ 19',\ c = 4013{,}1$
20) $a = 2066,\ b = 2954{,}4,\ C = 72^0 18'$	$A = 40^0\ 14',\ B = 67^0\ 28',\ c = 3047{,}2$
21) $a = 3218,\ c = 1786,\ B = 32^0\ 8'$	$A = 118^0\ 45',\ C = 29^0\ 7',\ b = 1952{,}3$
22) $a = 325,\ c = 833{,}54,\ B = 54^0\ 18'$	$A = 22^0\ 17',\ C = 103^0\ 25',\ b = 696{,}0$
23) $b = 719{,}5,\ c = 616{,}8,\ A = 51^0\ 26'$	$B = 73^0\ 21',\ C = 55^0\ 13',\ a = 587{,}17$
24) $b = 907{,}7,\ c = 1513,\ A = 36^0\ 12'$	$B = 34^0\ 29',\ C = 109^0\ 19',\ a = 946{,}9$
25) $a = 2065,\ b = 1717,\ c = 2564$	$A = 53^0\ 20',\ B = 41^0\ 50',\ C = 84^0\ 50'$
26) $a = 3044,\ b = 2017,\ c = 1189$	$A = 142^0 5',\ B = 24^0 1' 42'',\ C = 13^0 53' 18''$
27) $a = 350{,}7,\ b = 406{,}9,\ c = 271{,}4$	$A = 58^0\ 14'\ 46'',\ B = 80^0\ 36'\ 10'',$ $C = 41^0\ 9'\ 4''$
28) $a = 5067,\ b = 4335, c = 6848$	$A = 47^0\ 37'\ 44'',\ B = 39^0\ 12'\ 10'',$ $C = 93^0\ 10'\ 6''$
29) $a = 0{,}5783,\ b = 0{,}3642,\ c = 0{,}4179$	$A = 95^0\ 7'\ 2'',\ B = 38^0\ 50'\ 54'',$ $C = 46^0\ 2'\ 4''.$
30) $a = 0{,}2609,\ b = 0{,}3374,\ c = 0{,}5257$	$A = 24^0\ 45'\ 36'',\ B = 32^0\ 47'\ 40'',$ $C = 122^0\ 26'\ 44''$

D. Trigonometrische Kreisrechnungen.

§. 75. Aufgabe.

Die Sehne a eines Kreises zu berechnen, wenn der Radius r und der Bogen α gegeben sind.

Auflösung. $a = 2r \sin {}^1/_2\alpha.$

Beweis. 1) Wenn wir die Endpunkte der Sehne AB, Fig. 23, mit dem Mittelpunkte C verbinden und das Lot CD ziehen, so ist in dem rechtwinkligen Dreiecke ADC $AD = AC \sin ACD$

oder, da $AD = {}^1/_2 a,\ AC = r,\ ACD = {}^1/_2\alpha$ ist,

$${}^1/_2 a = r \sin {}^1/_2\alpha, \text{ also } a = 2r \sin {}^1/_2\alpha.$$

Beweis. 2) Wenn wir den Durchmesser AE ziehen und B mit E verbinden, so ist Winkel ABE, als Winkel im Halbkreise, ein rechter und der Peripheriewinkel $AEB = {}^1/_2\alpha$, folglich in dem rechtwinkligen Dreiecke ABE

$$a = AB = AE \sin AEB = 2r \sin {}^1/_2\alpha.$$

§. 76. Zusatz.

Die so eben erwiesene Gleichung lautet in Worten ausgesprochen:

Die Sehne ist gleich dem Durchmesser multiplicirt mit dem Sinus des zugehörigen Peripheriewinkels, wobei es gleichgiltig ist, ob der Peripheriewinkel in den größeren oder kleineren Abschnitt gezeichnet ist. Denn da in jedem Vierecke im Kreise zwei gegenüberliegende Winkel E und F, Fig. 23, sich zu einem Flachen ergänzen, so ist $\sin E = \sin F$; wir können daher ebensowohl setzen:

$$AB = 2r \sin E \text{ als auch } AB = 2r \sin F.$$

§. 77. Zusatz.

Wenn wir um das Dreieck ABC, Fig. 24, einen Kreis beschreiben und den Durchmesser desselben mit 2r bezeichnen, so ist zufolge des vorhergehenden §.

$$a = 2r \sin A, \quad b = 2r \sin B, \quad c = 2r \sin C,$$

folglich
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2r.$$

Schon aus §. 53 folgt, daß jede Seite eines Dreiecks, durch den Sinus des gegenüberliegenden Winkels dividirt, den nämlichen Quotienten gibt. Wir erfahren jetzt, daß dieser beständige Quotient dem Durchmesser des umschriebenen Kreises gleich ist.

§. 78. Aufgabe.

Die Länge des Bogens von einem Grade eines Parallelkreises der Erde zu berechnen, wenn die Breite dieses Parallelkreises α gegeben ist und die Erde als eine vollkommene Kugel angenommen wird.

Auflösung. Bekanntlich mißt ein Grad auf dem Aequator der Erde 15 geographische Meilen (indem man nämlich unter einer geographischen Meile den fünfzehnten Theil eines Grades des Aequators versteht). Ist nun AB, Fig. 25, der Durchmesser des Aequators, DE der Durchmesser des Parallelkreises, NS die Erdaxe und DCA $= \alpha$, so ist

$$\frac{DF}{DC} = \cos CDF = \cos \alpha, \text{ also auch } \frac{DE}{AB} = \cos \alpha.$$

Da sich nun die Peripherien zweier Kreise und folglich auch ähnliche Bogen wie die Durchmesser der Kreise verhalten, so ist, wenn wir die Länge eines Grades auf dem Aequator mit a, auf dem Parallelkreise mit b bezeichnen,

auch
$$\frac{b}{a} = \cos \alpha, \text{ also } b = a \cos \alpha$$

oder, wenn wir $a = 15$ setzen, $b = 15 \,.\, \cos \alpha$.

Ist z. B. $\alpha = 51^0\, 30'$, so ist $b = 15 \,.\, \cos \alpha = 15 \,.\, 0{,}6225 = 9{,}3375$. Es mißt also in der Breite von $51\,^1/_2{}^0$ ein Grad des Parallelkreises ohngefähr $9\,^1/_3$ Meile.

§. 79. Aufgabe.

Den Inhalt eines Kreisabschnitts AFB, Fig. 23, zu berechnen, wenn der Radius des Kreises $= r$ und (in Graden ausgedrückt) der Bogen AB $= \alpha$ gegeben ist.

Auflösung. Wir werden den Kreisabschnitt erhalten, wenn wir zuerst den Inhalt des Kreisausschnitts ACBF, dann den Inhalt des Dreiecks ABC berechnen und letzteren von ersterem subtrahiren. Nach §. 230 der Planimetrie ist

$$\text{der Ausschnitt} = \frac{r^2 \pi \alpha}{360^0}$$

und nach §. 69 der Trigonometrie ist

$$\text{das Dreieck} = \frac{AC \,.\, BC \,.\, \sin ACB}{2} = \frac{r^2 \sin \alpha}{2},$$

folglich
$$\text{der Abschnitt} = \frac{r^2 \pi \alpha}{360^0} - \frac{r^2 \sin \alpha}{2}.$$

Es sei r = 83,7 und $\alpha = 124^0\,43'$; dann ist zunächst der Kreisausschnitt gleich

$$\frac{(83,7)^2 \,.\, \pi \,.\, 124^0\,43'}{360^0} = \frac{(83,7)^2 \,.\, \pi \,.\, 7483'}{21600'}.$$

Wenden wir die Logarithmentafeln an, so ist

$$\begin{aligned} \log 83,7 &= 1,92273 \;(2 \\ &\; 3,84546 \\ + \log \pi &= 0,49715 \\ + \log 7483 &= 3,87408 \\ &\; 8,21669 \\ - \log 21600 &= 4,33445 \\ &\; 3,88224 \\ \text{Numerus} &= 7625. \end{aligned}$$

Ferner ist das Dreieck gleich

$$\frac{(83,7)^2 \,.\, \sin 124^0\,43'}{2} = \frac{(83,7)^2 \,.\, \sin 55^0\,17'}{2}.$$

Rechnen wir wieder mit Logarithmen, so ist zunächst zufolge der vorhergehenden Rechnung

$$\log (83,7)^2 = 3,84546$$

ferner

$$\begin{aligned} + \log \sin 55^0\,17' &= 9,91486 - 10 \\ &\; 3,76032 \\ - \log 2 &= 0,30103 \\ &\; 3,45929 \\ \text{Numerus} &= 2879. \end{aligned}$$

Es war der Ausschnitt = 7625
und das Dreieck = 2879
folglich ist der Abschnitt = 4746.

Wenn bei einem Kreisabschnitte CEGF, Fig. 38, die Höhe EF, welche wir mit a bezeichnen wollen, im Verhältniß zur Breite CG, die wir b nennen, nur klein ist, so können wir näherungsweise den Inhalt des Abschnitts

$$J = {}^2/_3 ab$$

setzen. Der so erhaltene Ausdruck ist etwas zu klein; der Fehler beträgt jedoch weniger als $2\left(\frac{a}{b}\right)^2$. Ist z. B. $a = 3^m$ (3 Meter), $b = 36^m$ gegeben, so erhalten wir näherungsweise

$$J = 72\text{qm}.$$

Ist nun auch der wahre Inhalt etwas größer, so sind wir doch hinter demselben um weniger als 1qm. zurückgeblieben. (Zu vergl. Kegelschnitte §. 59, Anm.)

*§. 80. Aufgabe.

Den Flächeninhalt der zweien sich schneidenden Kreisen gemeinschaftlichen Figur CEDF, Figur 27, zu berechnen, wenn die Radien AC = r, BC = ρ und die Centrale AB = c gegeben sind.

Auflösung. Die Figur CEDF ist die Summe zweier Kreisabschnitte CED und CFD; um dieselben nach dem vorhergehenden §. ausdrücken zu können, bedürfen wir der Kenntniß der Winkel CAD und CBD, welche wir der Kürze wegen mit α und β bezeichnen wollen. Da diese Winkel durch die Linie AB halbirt sind, so berechnen wir die Winkel CAB = $^1/_2\alpha$ und CBA = $^1/_2\beta$ aus dem Dreiecke ABC, in welchem wir alle drei Seiten AB = c, AC = r und BC = ρ kennen, mit Hilfe der Gleichungen des §. 68. Sind aber α und β gefunden, so ist nach dem vorhergehenden §.

1) der Kreisabschnitt $CED = \frac{r^2\pi\alpha}{360} - \frac{r^2 \sin\alpha}{2}$ und

2) der Kreisabschnitt $CFD = \frac{\rho^2\pi\beta}{360} - \frac{\rho^2 \sin\beta}{2}$, folglich

3) die Figur $CEDF = \frac{(r^2\alpha + \rho^2\beta)\pi}{360} - \frac{r^2 \sin\alpha + \rho^2 \sin\beta}{2}$.

*§. 81. Zusatz.

Die Rechnungen des vorhergehenden §. erfahren bedeutende Abkürzungen, wenn die sich schneidenden Kreise einander gleich sind, also $\rho = r$ und folglich auch $\beta = \alpha$ ist. Es ergibt sich dann zunächst der Winkel $\frac{1}{2}\alpha$ aus dem rechtwinkligen Dreiecke AGC, in welchem wir die Hypotenuse $AC = r$ und die Cathete $AG = \frac{1}{2}c$ kennen, durch die einfache Gleichung

$$1) \quad \cos \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{AG}{AC} = \frac{c}{2r}.$$

Da ferner die zu berechnende Figur CEDF durch die Sehne CD halbirt, also doppelt so groß als der Kreisabschnitt CED ist, so erhalten wir aus der Gleichung (1) des vorhergehenden §.

$$2) \text{ Fig. } CEDF = \frac{r^2\pi\alpha}{180} - r^2 \sin\alpha.$$

Die Entwickelungen der beiden vorhergehenden §§. finden eine nützliche Anwendung, um bei partialen Sonnenfinsternissen den von der Mondscheibe nicht verdeckten, also sichtbar bleibenden Theil der Sonnenscheibe zu berechnen. Da die scheinbaren Durchmesser der Sonne und des Mondes nur wenig von einander verschieden sind, so werden wir, wenn nicht die äußerste Genauigkeit verlangt wird, dieselben als gleich annehmen und uns der einfacheren Formeln des letzten §. bedienen können. Zur Bestimmung der Größe der partialen Finsterniß wird in den Kalendern nicht der Abstand des Mittelpunkts der Sonne und des Mondes, als welche wir hier A und B annehmen, sondern die Größe des durch den Mond bedeckten Theiles des Sonnendurchmessers, also die Linie EF angegeben, wobei man den zwölften Theil des Sonnendurchmessers einen Zoll zu nennen und folglich den ganzen Sonnendurchmesser gleich 12 Zoll zu setzen pflegt. Bezeichnen wir die gegebene Linie EF mit a, so ist die Centrale AB oder

$$c = AE + BF - EF = 2r - a,$$

folglich nach Gleichung (1) A) $\cos \frac{1}{2}a = \frac{2r - a}{2r}$.

Da ferner nach Gleichung (2) der durch den Mond verdeckte Theil der Sonnenscheibe

$$CEDF = \frac{r^2\pi\alpha}{180} - r^2 \sin\alpha$$

ist, so erhalten wir den sichtbar bleibenden Theil CHDFC, wenn wir diesen Ausdruck von dem ganzen Kreise $r^2\pi$ subtrahiren, also

$$CHDFC = \frac{r^2\pi(180 - \alpha)}{180} + r^2 \sin\alpha.$$

Dividiren wir diesen Ausdruck durch $r^2\pi$, und bezeichnen wir das Verhältniß des sichtbaren Theiles zur ganzen Sonnenscheibe mit q, so ergibt sich

$$B)\ q = \frac{180 - \alpha}{180} + \frac{\sin\alpha}{\pi}.$$

Beträgt z. B. die Größe einer Finsterniß 9,5 Zoll, so ist, wenn wir uns der am Ende dieses Buches befindlichen Tafel bedienen, welche uns hier größere Bequemlichkeit als die Logarithmentafel gewährt, nach Gleichung (A)

$$\cos {}^1/_2\alpha = \frac{12 - 9{,}5}{12} = \frac{2{,}5}{12} = 0{,}2083, \text{ folglich } {}^1/_2\alpha = 78^0 \text{ und } \alpha = 156^0.$$

Nun ist
$$\frac{180 - \alpha}{180} = \frac{24}{180} = 0{,}1333$$

und
$$\frac{\sin \alpha}{\pi} = \frac{7}{22} \,.\, 0{,}4067 = \underline{0{,}1294,}$$

folglich vermöge Gleichung (B) $\quad q = 0{,}2627.$

Es bleibt daher bei dieser Finsterniß etwas mehr als der vierte Theil der Sonnenscheibe sichtbar.

§. 82. Aufgabe.

Aus dem Umfange 2p eines regelmäßigen Vielecks von n Seiten den Radius r des umbeschriebenen, den Radius ρ des einbeschriebenen Kreises und den Inhalt J zu berechnen.

Auflösung. Wenn wir den Mittelpunkt C, Fig. 29, mit den Endpunkten einer Seite AB verbinden und aus C auf AB die Senkrechte CD ziehen, so ist $AC = BC = r$, $CD = \rho$, $AB = \frac{2p}{n}$, $AD = BD = \frac{p}{n}$, W. ACB $= \frac{360^0}{n}$, W. $ACD = BCD = \frac{180^0}{n}$. Wir erhalten daher aus dem rechtwinkligen Dreiecke ADC

$$1)\ r = \frac{AD}{\sin ACD} = \frac{p}{n \sin \frac{180^0}{n}}$$

$$2)\ \rho = AD \operatorname{cotg} ACD = \frac{p}{n} \,.\, \operatorname{cotg} \frac{180^0}{n}$$

und hieraus
$$3)\ J = p\rho = \frac{p^2}{n} \,.\, \operatorname{cotg} \frac{180^0}{n}.$$

Da $\operatorname{cotg} \frac{180^0}{n} = 1 : \operatorname{tang} \frac{180^0}{n}$ ist, und da ferner nach §. 16 der Sinus in schwächerem, die Tangente in stärkerem Verhältnisse als der Winkel zu- und abnimmt, so folgt aus diesen Gleichungen, daß bei gegebenem Umfange eines regelmäßigen Vielecks der Radius des umbeschriebenen Kreises um so kleiner, dagegen der Radius des einbeschriebenen Kreises und der Inhalt um so größer ausfällt, je größer die Zahl der Seiten des Vielecks ist.

§. 83. Zusatz.

Ist der Radius des Kreises = r gegeben und die Seite a des in denselben zu zeichnenden n-Ecks gesucht, so ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreiecke ADC, Fig. 29, die Gleichung

$${}^1/_2 a = r \sin \frac{180^0}{n}, \text{ also } a = 2r \sin \frac{180^0}{n}.$$

Wir sind daher im Stande, mit Leichtigkeit die Seiten eines jeden in einen Kreis zu beschreibenden regelmäßigen Vielecks durch trigonometrische Rechnung zu finden, während wir nur für eine beschränkte Zahl von regelmäßigen Vielecken die rein geometrische Construction auszuführen vermögen. (Vergl. oben §. 17.)

*§. 84, a. Aufgabe.

Aus den drei Seiten a, b, c eines Dreiecks ABC, Fig. 24, den Radius r des umbeschriebenen Kreises zu berechnen.

Auflösung. Nach §. 77 ist $r = \frac{a}{2 \sin A}$

und zufolge §. 69 ist $\sin A = \frac{2\,J}{bc}$,

wo wir uns den Inhalt J des Dreiecks ABC nach §. 73 durch die drei Seiten a, b, c ausgedrückt denken. Setzen wir den Werth von sin A aus der zweiten Gleichung in die erste ein, so ergibt sich

$$r = \frac{abc}{4J}.$$

*§. 84, b. Zusatz.

Die Aufgabe, aus den drei Seiten eines Dreiecks den Radius ρ des einbeschriebenen Kreises zu berechnen, ist schon oben (§. 67) gelöst worden.

Bereits an mehreren Stellen haben wir die Gleichung

$$J = p\rho,$$

in welcher p den halben Umfang des Dreiecks bezeichnet, aufgeführt. Setzen wir diesen Werth von J in die Gleichung des vorherg. §. ein, so verwandelt sich dieselbe in

$$r = \frac{abc}{4p\rho} \text{ oder } abc = 4pr\rho = p \,.\, 2r \,.\, 2\rho.$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich der Satz: In jedem Dreiecke ist das Product der drei Seiten gleich dem halben Umfange multiplicirt mit dem Durchmesser des umbeschriebenen und dem Durchmesser des einbeschriebenen Kreises.

§. 85, a. Aufgabe.

Aus den Winkeln α, β, γ eines Dreiecks ABC, Fig. 23, und dem Radius r des umbeschriebenen Kreises den Umfang 2p und den Inhalt J zu berechnen.

Aufl. Nach §. 77 ist

$$a = 2r \sin \alpha, \quad b = 2r \sin \beta, \quad c = 2r \sin \gamma.$$

Setzen wir diese Werthe in die Gleichungen

$$2p = a + b + c$$

und

$$J = \tfrac{1}{2} bc \sin \alpha$$

ein, so verwandeln sich dieselben in

$$1)\quad 2p = 2r\,(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)$$

und

$$2)\quad J = 2r^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma.$$

Zufolge des in §. 40 erwiesenen Satzes fällt sowohl die Summe $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$ als auch das Product $\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$ dann am größten aus, wenn $\alpha = \beta = \gamma$ ist. Es hat daher von allen in einen Kreis zu zeichnenden Dreiecken das gleichseitige den größten Umfang und den größten Inhalt.

§. 85, b. Aufgabe.

Aus den drei Winkeln α, β, γ eines Dreiecks ABC, Fig. 28, und dem Radius ρ des einbeschriebenen Kreises den Umfang 2p und den Inhalt J zu berechnen.

Aufl. Wie leicht zu sehen (und in §. 67 ausführlich gezeigt ist), ist

$$p = AD + BE + CF = \rho\ (\text{cotg}\ {}^1/_2\alpha + \text{cotg}\ {}^1/_2\beta + \text{cotg}\ {}^1/_2\gamma).$$

Nach §. 37 können wir hierfür auch setzen:

1) $p = \rho\ .\ \text{cotg}\ {}^1/_2\alpha\ \text{cotg}\ {}^1/_2\beta\ \text{cotg}\ {}^1/_2\gamma$

und erhalten demgemäß weiter

2) $J = p\rho = \rho^2\ \text{cotg}\ {}^1/_2\alpha\ \text{cotg}\ {}^1/_2\beta\ \text{cotg}\ {}^1/_2\gamma$.

Nach §. 40, Anm. wird das Product tang $^1/_2\alpha$ tang $^1/_2\beta$ tang $^1/_2\gamma$ dann am größten, wenn $\alpha = \beta = \gamma$ ist, und da die Cotangente die Reciproke der Tangente ist, so fällt folglich in diesem Falle das Product cotg $^1/_2\alpha$ cotg $^1/_2\beta$ cotg $^1/_2\gamma$ am kleinsten aus.

Von allen um einen Kreis zu zeichnenden Dreiecken hat daher das gleichseitige den kleinsten Umfang und Inhalt.

Anhang.

Vergleichung des Umfangs und Inhalts der Figuren.

Im Anschluß an die vorhergehenden Sätze soll im Folgenden gezeigt werden, daß bei gleichem Umfange das regelmäßige Vieleck einen größeren Inhalt hat als jedes unregelmäßige von gleicher Seitenzahl, und daß unter allen Figuren überhaupt der Kreis bei gleichem Umfange den größten Inhalt hat. Ehe wir jedoch hierzu übergehen können, haben wir noch den folgenden Satz zu erweisen.

1. Lehrsatz. Unter allen Vierecken, welche in ihren Seiten in der nämlichen Folge übereinstimmen, hat dasjenige, um welches sich ein Kreis beschreiben läßt, den größten Inhalt.

Beweis. Es sei ABCD, Fig. 41, ein beliebiges Viereck; in demselben sei Seite $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, Winkel $BAD = \alpha$ und $BCD = \gamma$; dann ist nach §. 69 der Inhalt des Vierecks

$$J = {}^1/_2 ad \sin \alpha + {}^1/_2 bc \sin \gamma,$$

folglich 1) $ad \sin \alpha + bc \sin \gamma = 2J$.

Drücken wir ferner die Diagonale BD aus den beiden Dreiecken BAD und BCD nach §. 62 aus, so erhalten wir die Gleichung

$$a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha = b^2 + c^2 - 2bc \cos \gamma,$$

daher 2) $ad \cos \alpha - bc \cos \gamma = {}^1/_2\ (a^2 - b^2 - c^2 + d^2)$.

Wenn wir die Gleichungen (1) und (2) quadriren und addiren, so bekommen wir nach §. 18 und 27 weiter

$$a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd \cos (\alpha + \gamma) = 4J^2 + {}^1/_4\ (a^2 - b^2 - c^2 + d^2)^2,$$

also $4J^2 = a^2d^2 + b^2c^2 - {}^1/_4\ (a^2 - b^2 - c^2 + d^2)^2 - 2abcd \cos (\alpha + \gamma)$.

Denken wir uns die Seiten a, b, c, d als gegeben, die Winkel α und γ aber als unbestimmt gelassen, so sind auf der rechten Seite der vorstehenden Gleichung alle Glieder bis auf das letzte $2abcd \cos (\alpha + \gamma)$ constant, dieses Glied aber nach der verschiedenen Größe der Winkelsumme $\alpha + \gamma$ veränderlich. Dasselbe wird am kleinsten, der Inhalt J folglich am größten, wenn $\alpha + \gamma = 180^0$ ist, also wenn sich um das Viereck ABCD ein Kreis beschreiben läßt*).

---

*) Wenn wir in der obigen Gleichung $\alpha + \gamma = 180^0$, also $\cos (\alpha + \gamma) = -1$ setzen, so erhalten wir aus derselben nach einiger Umformung für den Inhalt eines Kreisvierecks, dessen Seiten gleich a, b, c, d gegeben sind, die Formel

$$J = {}^1/_4\sqrt{(a + b + c - d)(a + b - c + d)(a - b + c + d)(-a + b + c + d)}$$

2. Lehrsatz. Das regelmäßige Vieleck hat einen größern Inhalt als das unregelmäßige von gleichem Umfange und gleicher Seitenzahl.

Beweis. Es sei ABEFGHKLMN, Fig. 29, das größte Vieleck, welches sich aus einem gegebenen Umfange bei vorgeschriebener Seitenzahl construiren läßt; dann muß dasselbe erstens gleiche Seiten haben. Denn angenommen, Seite HK wäre nicht = KL, so ließe sich, wenn wir H mit L verbinden, über HL ein gleichschenkliges Dreieck HXL construiren, in welchem die Seitensumme HX + LX = HK + KL ist. Dann wäre aber nach §. 73, Anm. $\triangle$ HXL > HKL, folglich auch Vieleck ABEFGHXLMN > ABEFGHKLMN; und es wäre also ABEFGHKLMN nicht das größte Vieleck, welches sich aus dem gegebenen Umfange bei vorgeschriebener Seitenzahl construiren läßt. — Das Vieleck ABEFGHKLMN muß zweitens, wenn es diese Bedingung erfüllen soll, auch gleiche Winkel haben; denn angenommen, es wäre Winkel GHK nicht = HKL; dann ließe sich, wenn wir G mit L verbinden, ein Viereck (Antiparallelogramm) GXYL construiren, in welchem GX = GH, XY = HK, YL = KL und Winkel GXY = XYL ist. Zufolge des vorhergehenden Lehrsatzes wäre aber Viereck GXYL > GHKL, daher auch Vieleck ABEFGXYLMN > ABEFGHKLMN, was gegen unsere Annahme streitet. — Es muß daher das Vieleck, welches bei gegebenem Umfange und vorgeschriebener Seitenzahl den größten Inhalt hat, sowohl gleiche Seiten als auch gleiche Winkel haben, also regelmäßig sein.

Zusatz. In ähnlicher Art, wie wir den zweiten Theil des vorstehenden Beweises geführt haben, läßt sich zeigen, daß ein Vieleck, um welches ein Kreis beschrieben werden kann, größer ist als jedes andere, welches mit demselben in allen Seiten der Reihe nach übereinstimmt.

3. Lehrsatz. Der Kreis hat unter allen Figuren von gleichem Umfange den größten Inhalt.

Beweis. Unter allen möglichen Vielecken, welche man mit einem gegebenen Umfange umschließen kann, haben bei gleicher Seitenzahl die regelmäßigen den größten Inhalt; und die regelmäßigen selbst sind (nach §. 82, Anm.) um so größer, je größer die Zahl ihrer Seiten ist. Da nun der Kreis als ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten anzusehen ist, so hat derselbe folglich einen größern Inhalt als jede geradlinige Figur von gleichem Umfange.

Der Kreis ist aber auch größer als jede krummlinige Figur mit gleichem Umfange, indem eine krummlinige Figur, welche kein Kreis ist, als ein unregelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten angesehen werden kann.

Dritter Abschnitt.

Aufgaben.

A. Aus der analytischen Trigonometrie*).

*§. 86. Aufgabe.

Den Winkel x aus der Gleichung

1) $m \sin x = n \cos x$ zu berechnen.

*) Wir rathen dem weniger geübten Leser, diese Aufgaben vorläufig zu überschlagen und sogleich zu den Aufgaben über Dreiecke und Vierecke überzugehen, bei denen die synthetische Auflösung, welche sich eng an die Figur anschließt und wegen größerer Anschaulichkeit leichter zu fassen ist, nur die Kenntniß der Fundamentalgleichungen über die Auflösung der Dreiecke erfordert.

Auflösung. Dividiren wir die gegebene Gleichung durch $\cos x$, so verwandelt sich dieselbe in 2) $m \tang x = n$,

woraus sich ergibt 3) $\tang x = \frac{n}{m}$.

Eigentlich liefert die zuletzt erhaltene Gleichung unzählige Werthe für den Winkel x, da alle Winkel, welche sich um 180^0 oder ein Vielfaches von 180^0 unterscheiden, die nämliche trigonometrische Tangente haben. Soll aber der Winkel x in einem Dreiecke liegen, so wird unter diesen unzähligen Werthen nur derjenige zu brauchen sein, welcher kleiner als 180^0 ist. Aehnliche Bemerkungen ließen sich auch an die Auflösungen der nächstfolgenden Aufgaben anschließen; wir werden dieselben jedoch der Kürze wegen und als sich von selbst verstehend übergehen.

*§. 87. Aufgabe.

Den Winkel x aus der Gleichung

1) $m \sin(\alpha + x) = n \sin(\beta - x)$ zu berechnen.

Auflösung. Wenn wir $\sin(\alpha + x)$ und $\sin(\beta - x)$ entwickeln, so verwandelt sich die gegebene Gleichung in

2) $m \sin\alpha \cos x + m \cos\alpha \sin x = n \sin\beta \cos x - n \cos\beta \sin x$.

Dividiren wir diese Gleichung durch $\cos x$, so erhalten wir weiter

3) $m \sin\alpha + m \cos\alpha \tang x = n \sin\beta - n \cos\beta \tang x$

oder 4) $(m \cos\alpha + n \cos\beta) \tang x = n \sin\beta - m \sin\alpha$,

also 5) $\tang x = \frac{n \sin\beta - m \sin\alpha}{m \cos\alpha + n \cos\beta}$.

Bemerkung.

Die Gleichung (1) des vorletzten und die Gleichung (2) des letzten §. enthielten eigentlich zwei Unbekannte, nämlich $\sin x$ und $\cos x$; indem wir aber sämmtliche Glieder dieser Gleichungen durch $\cos x$ dividirten, fiel $\cos x$ in den mit diesem Factor multiplicirten Gliedern ganz aus und an die Stelle von $\sin x$ trat $\tang x$. Wir erhielten auf diese Art eine einfache Gleichung mit einer Unbekannten, $\tang x$, welche sich ohne Schwierigkeit auflösen ließ. Dieses Verfahren kann jedoch nur dann Anwendung finden, wenn sämmtliche Glieder der Gleichung entweder $\sin x$ oder $\cos x$ zum Factor haben. Die folgende Aufgabe zeigt, welchen Weg man einzuschlagen hat, wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist.

*§. 88. Aufgabe.

Den Winkel x aus der Gleichung

1) $m \sin x + n \cos x = p$ zu berechnen.

Auflösung. Wir dividiren zunächst die ganze Gleichung durch m, wodurch sich dieselbe verwandelt in

2) $\sin x + \frac{n}{m} \cdot \cos x = \frac{p}{m}$.

Hierauf suchen wir denjenigen Winkel, dessen trigonometrische Tangente gleich $\frac{n}{m}$ ist. Bezeichnen wir diesen Winkel mit φ, so ist also

3) $\tang \varphi = \frac{n}{m}$

und wir werden daher die Gleichung (2) auch so schreiben können:

$$4)\ \sin x + \tan\varphi \cos x = \frac{p}{m}$$

oder

$$5)\ \sin x + \frac{\sin\varphi \cos x}{\cos\varphi} = \frac{p}{m}.$$

Schaffen wir den Bruch weg, so erhalten wir weiter

$$6)\ \sin x \cos\varphi + \cos x \sin\varphi = \frac{p\cos\varphi}{m},$$

wofür wir offenbar auch kürzer

$$7)\ \sin(\varphi + x) = \frac{p\cos\varphi}{m}$$

setzen können. Durch die Gleichung (3) ist Winkel φ bestimmt; berechnen wir daher aus der Gleichung (7) den Winkel $\varphi + x$, so ist offenbar auch Winkel x selbst gefunden.

Das so eben zur Auflösung der Gleichung (1) eingeschlagene Verfahren empfiehlt sich dadurch, daß es ganz zum logarithmischen Rechnen geeignet ist. Beabsichtigt man nicht gerade Logarithmen anzuwenden, so kann man auch sin x oder cos x unmittelbar ohne Zuziehung eines Hilfswinkels ausdrücken. Zu diesem Zwecke fügen wir zu der gegebenen Gleichung

$$1)\ m \sin x + n \cos x = p,$$

welche zwei Unbekannte sin x und cos x enthält und daher allein zur Berechnung derselben nicht ausreichen kann, die allgemeine trigonometrische Gleichung

$$2)\ \sin x^2 + \cos x^2 = 1$$

hinzu. Aus der ersten Gleichung ist

$$3)\ \cos x = \frac{p - m \sin x}{n}.$$

Setzen wir diesen Werth in die zweite Gleichung ein, so verwandelt sich dieselbe in

$$4)\ \sin x^2 + \frac{p^2 - 2mp \sin x + m^2 \sin x^2}{n^2} = 1$$

oder

$$5)\ (m^2 + n^2) \sin x^2 - 2mp \sin x = n^2 - p^2$$

oder

$$6)\ \sin x^2 - \frac{2mp \sin x}{m^2 + n^2} = \frac{n^2 - p^2}{m^2 + n^2},$$

woraus sich auf bekannte Weise ergibt:

$$7)\ \sin x = \frac{mp \pm n\sqrt{m^2 + n^2 - p^2}}{m^2 + n^2}$$

und folglich vermöge Gleichung (3)

$$8)\ \cos x = \frac{np \mp m\sqrt{m^2 + n^2 - p^2}}{m^2 + n^2}$$

Die hier erhaltenen Gleichungen (7) und (8) liefern, auch wenn $x < 180^0$ gedacht wird, zwei Werthe für x; dasselbe thut, wenn auch weniger augenfällig, die Gleichung (7) des Haupttextes, da jeder Sinus sowohl einem spitzen als auch einem stumpfen Winkel zugehört. Aus den zuletzt erhaltenen Gleichungen (7) und (8) folgt noch, daß, wenn überhaupt die Aufgabe zu lösen sein soll,

$$p^2 \overline{\overline{<}}\ m^2 + n^2,$$

also

$$p \overline{\overline{<}} \sqrt{m^2 + n^2}$$

sein muß. Dies vorausgesetzt ergeben aber die Gleichungen (7) und (8) für sin x und cos x jedenfalls Werthe, welche die Einheit nicht übersteigen, da sie zufolge der vorstehenden Rechnung der Gleichung (2) Genüge thun. Zwei reelle Ausdrücke müssen nämlich offenbar $\leqq 1$ sein, wenn die Summe ihrer Quadrate $= 1$ ist.

*§. 89. Aufgabe.

Von zwei Winkeln ist die Summe 1) $x + y = 2\sigma$
und die Differenz der Sinus 2) $\sin x - \sin y = d$
gegeben; es sollen hieraus diese Winkel berechnet werden.

Auflösung. Da die Summe der Winkel x und y gegeben ist, so haben wir nur nöthig, ihre Differenz $x - y$, welche wir mit 2ϑ bezeichnen wollen, zu suchen. — Nach §. 33 läßt sich die Gleichung (2) in die folgende umformen $2 \cos \sigma \sin \vartheta = d$,

woraus sich
$$\sin \vartheta = \frac{d}{2 \cos \sigma}$$
ergibt. Ist aber hiernach ϑ gefunden, so ist $x = \sigma + \vartheta$ und $y = \sigma - \vartheta$.

*§. 90. Aufgabe.

Die Winkel x und y zu berechnen, wenn die Differenz derselben

1) $x - y = 2\vartheta$

und die Summe ihrer Cosinus

2) $\cos x + \cos y = a$ gegeben ist.

Auflösung. Da die Differenz der Winkel x und y gegeben ist, so suchen wir ihre Summe, welche wir mit 2σ bezeichnen. Hierzu gelangen wir leicht, indem wir der Gleichung (2) nach §. 33 die folgende Form geben:

$$2 \cos \sigma \cos \vartheta = a, \text{ also } \cos \sigma = \frac{a}{2 \cos \vartheta}.$$

Haben wir hieraus σ gefunden, so ist $x = \sigma + \vartheta$ und $y = \sigma - \vartheta$.

*§. 91. Aufgabe.

Aus den Gleichungen

1) $x + y = 2\sigma$

2) $\sin x \cos y = a$

die Winkel x und y zu berechnen.

Auflösung. Wir suchen wieder, da die Summe der Winkel x und y gegeben ist, ihre Differenz und bezeichnen dieselbe mit 2ϑ. Multipliciren wir die Gleichung (2) mit der Zahl 2, so erhalten wir

3) $2 \sin x \cos y = 2a$.

Nun ist bekanntlich $\sin (x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
und $\sin (x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$,
folglich, wenn wir diese Gleichungen addiren,

4) $\sin (x + y) + \sin (x - y) = 2 \sin x \cos y$.

Aus der Verknüpfung der Gleichungen (3) und (4) ergibt sich

5) $\sin (x + y) + \sin (x - y) = 2a$

oder 6) $\sin 2\sigma + \sin 2\vartheta = 2a$,

also 7) $\sin 2\vartheta = 2a - \sin 2\sigma$.

*§. 92. Aufgabe.

Die Winkel x und y zu berechnen, wenn die Differenz derselben 1) $x - y = 2\vartheta$

und das Verhältniß ihrer Cosinus

$$2)\ \frac{\cos x}{\cos y} = \frac{m}{n}$$

gegeben ist.

Auflösung. Nach einem bekannten Satze der Proportionen folgt aus der Gleichung (2)

$$\frac{\cos y - \cos x}{\cos x + \cos y} = \frac{n - m}{m + n},\text{*)}$$

wofür wir nach §. 33 auch setzen können

$$\frac{2 \sin \sigma \sin \vartheta}{2 \cos \sigma \cos \vartheta} = \frac{n - m}{m + n}$$

oder

$$\operatorname{tang} \sigma \operatorname{tang} \vartheta = \frac{n - m}{m + n},$$

also (zufolge §. 22)

$$\operatorname{tang} \sigma = \frac{n - m}{m + n} \operatorname{cotg} \vartheta.$$

*§. 93. Aufgabe.

Die Winkel x und y zu finden, wenn zur Bestimmung derselben die Gleichungen 1) $x - y = 2\vartheta$ und 2) $\sin x^2 + \sin y^2 = a$ gegeben sind.

Auflösung. Wir multipliciren zunächst die Gleichung (2) mit der Zahl 2 und erhalten so

$$2 \sin x^2 + 2 \sin y^2 = 2a.$$

Nach §. 30, a ist

$$2 \sin x^2 = 1 - \cos 2x \text{ und } 2 \sin y^2 = 1 - \cos 2y.$$

Setzen wir diese Werthe in die vorhergehende Gleichung ein, so verwandelt sich dieselbe in $1 - \cos 2x + 1 - \cos 2y = 2a,$
wofür wir zufolge §. 33 auch setzen können

$$\cos 2\sigma \,.\, \cos 2\vartheta = 1 - a,$$

also

$$\cos 2\sigma = \frac{1 - a}{\cos 2\vartheta}.$$

*§. 94. Aufgabe.

Die Winkel x und y zu finden, wenn zur Bestimmung derselben die Gleichungen 1) $x + y = 2\sigma$ und 2) $\operatorname{tang} x + \operatorname{tang} y = a$ gegeben sind.

Auflösung. Nach §. 38 läßt sich die Gleichung (2) umformen in

$$\frac{\sin (x + y)}{\cos x \cos y} = a,$$

folglich

$$2 \sin (x + y) = 2a \cos x \cos y = a \cos (x + y) + a \cos (x - y)$$

oder

$$2 \sin 2\sigma = a \cos 2\sigma + a \cos 2\vartheta,$$

also

$$\cos 2\vartheta = \frac{2 \sin 2\sigma}{a} - \cos 2\,\sigma.$$

---

*) Wenn wir von der einfachsten Annahme ausgehen, daß x und y spitze Winkel sind, und wenn $x > y$ gedacht wird, so ist $\cos y > \cos x$.

*§. 95. Aufgabe.

Aus den Gleichungen

$$1)\ x + y = 2\sigma \text{ und } 2)\ \text{tang}\, x - \text{tang}\, y = d$$

die Winkel x und y zu berechnen.

Auflösung. Indem wir in ähnlicher Weise wie im vorhergehenden §. verfahren, formen wir die Gleichung (2) um in

$$2 \sin 2\vartheta - d \cos 2\vartheta = d \cos 2\sigma.$$

Da in dieser Gleichung sowohl der Sinus als auch der Cosinus des gesuchten Winkels 2ϑ vorkommt, so wenden wir weiter das in §. 88 befolgte Verfahren an und setzen demgemäß

$$\frac{d}{2} = \text{tang}\, \varphi.$$

Dann erhalten wir den gesuchten Winkel 2ϑ aus der Gleichung

$$\sin (2\vartheta - \varphi) = \sin \varphi \cos 2\sigma.$$

In ähnlicher Art wie die vorhergehenden Aufgaben lassen sich überhaupt folgende lösen: Die Winkel x und y zu berechnen, wenn ihre Summe oder Differenz bekannt und eine der nachstehenden Gleichungen gegeben ist:

1)	$\sin x + \sin y = a$	10)	$\sin x^2 + \sin y^2 = a$
2)	$\sin x - \sin y = d$	11)	$\sin x^2 - \sin y^2 = d$
3)	$\cos x + \cos y = a$	12)	$\cos x^2 + \cos y^2 = a$
4)	$\cos y - \cos x = d$	13)	$\cos y^2 - \cos x^2 = d$
5)	$\sin x \,.\, \sin y = a$	14)	$\text{tang}\, x + \text{tang}\, y = a$
6)	$\sin x \,.\, \cos y = a$	15)	$\text{tang}\, x - \text{tang}\, y = d$
7)	$\cos x \,.\, \cos y = a$	16)	$\text{tang}\, x \,.\, \text{tang}\, y = a$
8)	$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{m}{n}$	17)	$\frac{\text{tang}\, x}{\text{tang}\, y} = \frac{m}{n}.$
9)	$\frac{\cos x}{\cos y} = \frac{m}{n}$		

Da von den gesuchten Winkeln entweder die Summe $x + y = 2\sigma$ oder die Differenz $x - y = 2\vartheta$ gegeben sein soll, so sind in den vorstehenden 17 Gleichungen überhaupt 34 Uebungsaufgaben enthalten. — Wir haben in dieser Zusammenstellung die Cotangenten übergangen, da die Cotangente die Reciproke der Tangente ist, und daher die Aufgaben über Cotangenten im wesentlichen mit den analogen Aufgaben über die Tangenten übereinstimmen.

Von anderen in der obigen Aufzählung übergangenen Combinationen wollen wir noch die beiden folgenden hier anführen:

1) Es sei gegeben $\quad 1)\ \sin x + \cos y = a$

und $\quad 2)\ x - y = 2\vartheta.$

Bekanntlich ist $\cos y = \sin (90^0 - y)$. Setzen wir nun, um zu kürzen, $90^0 - y = z$, so verwandeln sich die gegebenen Gleichungen in

$$\sin x + \sin z = a$$

und $\quad x - (90^0 - z) = 2\vartheta$ oder $x + z = 90^0 + 2\vartheta,$

wonach sich die Aufgabe in ganz ähnlicher Art wie die in §. 89 lösen läßt.

2) Es sei ferner gegeben $\quad 1)\ \frac{\sin x}{\cos y} = \frac{m}{n}$

und $\quad 2)\ x + y = 2\sigma.$

Statt des in §. 92 angegebenen Weges der Auflösung schlagen wir hier bequemer folgendes

Verfahren ein: Wenn wir in der Gleichung (1) $x = \sigma + \vartheta$ und $y = \sigma - \vartheta$ setzen, so verwandelt sich dieselbe in

$$\frac{\sin(\sigma + \vartheta)}{\cos(\sigma - \vartheta)} = \frac{m}{n} \text{ oder } n \sin(\sigma + \vartheta) = m \cos(\sigma - \vartheta).$$

Entwickeln wir diese Ausdrücke, so erhalten wir weiter

$$n \sin\sigma \cos\vartheta + n \cos\sigma \sin\vartheta = m \cos\sigma \cos\vartheta + m \sin\sigma \sin\vartheta,$$

und wenn wir die ganze Gleichung durch $\cos\sigma \cos\vartheta$ dividiren,

$$n \operatorname{tang}\sigma + n \operatorname{tang}\vartheta = m + m \operatorname{tang}\sigma \operatorname{tang}\vartheta,$$

folglich

$$\operatorname{tang}\vartheta = \frac{m - n \operatorname{tang}\sigma}{n - m \operatorname{tang}\sigma}.$$

Anhang.

Von der Auflösung quadratischer Gleichungen.

Auch zur Auflösung quadratischer Gleichungen liefert die Trigonometrie ein bequemes Mittel, dessen Anwendung sich besonders dann empfiehlt, wenn statt der Zahlen selbst deren Logarithmen gegeben sind, oder wenn aus irgend einem andern Grunde das Rechnen mit Logarithmen vorzuziehen ist. — Wir unterscheiden hierbei vier Fälle:

Erster Fall.

Ist die quadratische Gleichung von der Form

$$x^2 + px = +q$$

gegeben, so ist bekanntlich

$$1)\quad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 + 4q}}{2}.$$

Formen wir den Ausdruck unter dem Wurzelzeichen in $p^2\left(1 + \frac{4q}{p^2}\right)$ um, ziehen darauf aus dem ersten Factor p^2 die Wurzel aus und sondern p ab, so geht Gleichung (1) über in

$$2)\quad x = \frac{p}{2}\left(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{4q}{p^2}}\right).$$

Der unter dem Wurzelzeichen stehende Quotient $\frac{4q}{p^2}$ mag nun ein ächter oder unächter Bruch sein, jedenfalls gibt es, da die Tangente alle möglichen Werthe durchläuft, einen Winkel φ von der Größe, daß

$$3)\quad \operatorname{tang}\varphi^2 = \frac{4q}{p^2},$$

also

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{2\sqrt{q}}{p}$$

ist.

Setzen wir daher $\frac{4q}{p^2} = \operatorname{tang}\varphi^2$ in Gleichung (2) ein und berücksichtigen, daß $1 + \operatorname{tang}\varphi^2 = \sec\varphi^2$ ist, so verwandelt sich Gleichung (2) in

$$4)\quad x = \frac{p}{2}(-1 \pm \sec\varphi) = \frac{p}{2}\left(\frac{-\cos\varphi \pm 1}{\cos\varphi}\right).$$

Nun ist aber nach Gleichung (3) $\tan\varphi = \frac{2\sqrt{q}}{p}$, mithin $\frac{p}{2} = \frac{\sqrt{q}}{\tan\varphi}$, folglich ist

$$5)\quad x = \frac{\sqrt{q}\,(-\cos\varphi \pm 1)}{\tan\varphi\,.\,\cos\varphi} = \frac{\sqrt{q}\,(-\cos\varphi \pm 1)}{\sin\varphi}, \text{ also}$$

$$x_{\prime} = \frac{\sqrt{q}\,(1-\cos\varphi)}{\sin\varphi} = \frac{\sqrt{q}\,.\,2\sin\frac{\varphi^2}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}\,.\cos\frac{\varphi}{2}} = \sqrt{q}\,.\tan\frac{\varphi}{2}.$$

$$x_{\prime\prime} = \frac{-\sqrt{q}\,(1+\cos\varphi)}{\sin\varphi} = \frac{-\sqrt{q}\,.\,2\,.\cos\frac{\varphi^2}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}\,.\,\cos\frac{\varphi}{2}} = -\sqrt{q}\,.\,\mathrm{cotg}\frac{\varphi}{2}.$$

Beispiel.

$$x^2 + 7x = +\,30.$$

$\log q = 2)\,\underline{1{,}47712}$
$\quad 0{,}73856$
$+\log 2 = \underline{0{,}30103}$
$\quad 1{,}03959$
$-\log p = \underline{0{,}84510}$
$\log\tan\varphi = 0{,}19449$
$\varphi = 57^0 25' 15''$

$\frac{\varphi}{2} = 28^0 42' 37{,}5''$
$\log\tan\frac{\varphi}{2} = 9{,}73856 - 10$
$+\log\sqrt{q} = \underline{0{,}73856}$
$\quad 0{,}47712$
$x_{\prime} = +\,3.$

$\log\mathrm{cotg}\frac{\varphi}{2} = 0{,}26144$
$+\log\sqrt{q} = \underline{0{,}73856}$
$\quad 1{,}00000$
$\sqrt{q}\,.\,\mathrm{cotg}\frac{\varphi}{2} = +\,10$
$x_{\prime\prime} = -\,10.$

Zweiter Fall.

Ist die Gleichung $\qquad x^2 - px = +\,q$

gegeben, so ist $\qquad x = \frac{p}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4q}{p^2}}\right),$

woraus unter Benutzung derselben Substitution

$$x_{\prime} = \frac{\sqrt{q}(1+\sec\varphi)}{\tan\varphi} = \frac{\sqrt{q}\,.\,(1+\cos\varphi)}{\sin\varphi} = \sqrt{q}\,.\,\mathrm{cotg}\frac{\varphi}{2}$$

und $x_{\prime\prime} = \frac{\sqrt{q}(1-\sec\varphi)}{\tan\varphi} = \frac{\sqrt{q}(\cos\varphi - 1)}{\sin\varphi} = \frac{-\sqrt{q}(1-\cos\varphi)}{\sin\varphi}$

$= -\sqrt{q}\,.\,\tan\frac{\varphi}{2}$ folgt.

Dritter Fall.

Ist die Gleichung $\qquad x^2 + px = -\,q$

gegeben, so ist $\qquad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$

Soll nun x reell sein — und nur unter dieser Voraussetzung findet die Trigonometrie im vorliegenden Falle Anwendung —, so muß $p^2 \geqq 4q$ sein.

Formen wir also den Werth von x in

$$1)\quad x = \frac{p}{2}\left(-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}}\right)$$

um, so ist der Bruch $\frac{4q}{p^2}$ ein ächter Bruch, welcher höchstens den Werth 1 erreichen kann. Daher dürfen wir

$$2)\quad \frac{q}{p^2} = \sin\varphi^2$$

oder

$$\sin\varphi = \frac{2\sqrt{q}}{p}$$

setzen, wodurch, da $\sqrt{1-\sin\varphi^2} = \cos\varphi$ und $\frac{p}{2} = \frac{\sqrt{q}}{\sin\varphi}$ ist, Gleichung (1) in

$$3)\quad x = \frac{\sqrt{q}\,(-1 \pm \cos\varphi)}{\sin\varphi}$$

übergeht. Hiernach ist

$$x_{I} = \frac{\sqrt{q}\,(-1+\cos\varphi)}{\sin\varphi} = \frac{-\sqrt{q}\,(1-\cos\varphi)}{\sin\varphi} = -\sqrt{q}\,.\,\mathrm{tang}\,\frac{\varphi}{2},$$

$$x_{II} = \frac{\sqrt{q}\,(-1-\cos\varphi)}{\sin\varphi} = \frac{-\sqrt{q}\,(1+\cos\varphi)}{\sin\varphi} = -\sqrt{q}\,.\,\mathrm{cotg}\,\frac{\varphi}{2}.$$

Beispiel.

$$x^2 + 16x = -55.$$

$\log q = 1{,}74036$, $2)\,\overline{0{,}87018}$

$+ \log 2 = 0{,}30103$

$\overline{11{,}17121\text{-}10}$

$- \log p = 1{,}20412$

$\log\sin\varphi = 9{,}96709\text{-}10$

$\varphi = 67^0\ 58'\ 36''$

$\frac{\varphi}{2} = 33^0 59' 18''$

$\log\mathrm{tang}\,\frac{\varphi}{2} = 9{,}82879\text{-}10$

$+ \log\sqrt{q} = 0{,}87018$

$\overline{0{,}69897}$

$\sqrt{q}\,.\,\mathrm{tang}\,\frac{\varphi}{2} = +5$

$x_{I} = -5$

$\log\mathrm{cotg}\,\frac{\varphi}{2} = 0{,}17121$

$+ \log\sqrt{q} = 0{,}87018$

$\overline{1{,}04139}$

$\sqrt{q}\,.\,\mathrm{cotg}\,\frac{\varphi}{2} = +11$

$x_{II} = -11.$

Vierter Fall.

Ist endlich die Gleichung $x^2 - px = -q$ gegeben, woraus

$$x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

folgt, so ist, wie leicht zu übersehen,

$$x_{I} = \frac{\sqrt{q}\,(1+\cos\varphi)}{\sin\varphi} = \sqrt{q}\,.\,\mathrm{cotg}\,\frac{\varphi}{2}$$

und

$$x_{II} = \frac{\sqrt{q}\,(1-\cos\varphi)}{\sin\varphi} = \sqrt{q}\,.\,\mathrm{tang}\,\frac{\varphi}{2}.$$

B. Aufgaben über Dreiecke.

§. 96. Aufgabe.

Ein Dreieck zu zeichnen und trigonometrisch aufzulösen, von welchem die Grundlinie = c, die Höhe = h und eine Seite = b gegeben sind.

I. Geometr. Auflösung. Auf einer willkürlichen Linie errichten wir das Lot CD = h, Fig. 30, beschreiben um den Endpunkt C mit b einen Kreis, welche die zuerst gezogene Linie in A durchschneidet, schneiden von derselben AB = c ab und verbinden endlich B mit C; so ist ABC das verlangte Dreieck.

II. Trigonometr. Auflösung. Wir lösen zunächst das zuerst gezeichnete rechtwinklige Dreieck ADC auf. Wir kennen in demselben die Hypotenuse AC = b und eine Cathete CD = h und berechnen hieraus den Winkel A durch die Gleichung

$$1)\quad \sin A = \frac{h}{b};$$

ferner
$$AD = \sqrt{b^2 - h^2};$$

dann ist
$$BD = c - AD = c - \sqrt{b^2 - h^2}.$$

Wir sind nun auch im Stande, das rechtwinklige Dreieck BCD aufzulösen, da wir in demselben beide Catheten CD und BD kennen. Wir erhalten den Winkel B durch die Gleichung

$$2)\quad \operatorname{tang} B = \frac{CD}{BD} = \frac{h}{c - \sqrt{(b^2 - h^2)}}.$$

Dann ist
$$3)\quad C = 180^0 - (A + B)$$

und
$$4)\quad BC = \frac{CD}{\sin B} = \frac{h}{\sin B}.$$

Wenn wir AB über A um AB' = c verlängern und C mit B' verbinden, so erhalten wir ein zweites Dreieck AB'C, welches ebenfalls der Aufgabe entspricht, indem es sämmtliche gegebenen Stücke CD = h, AC = b und AB' = c enthält. Die Aufgabe hat also zwei verschiedene Auflösungen. In den beiden der Aufgabe entsprechenden Dreiecken ABC und AB'C ergänzen sich die Winkel CAB und CAB' zu einem Flachen. Ganz demgemäß gibt uns die Gleichung (1) der trigonometrischen Auflösung zwei sich zu 180^0 ergänzende Werthe für A, indem jeder Sinus sowohl einem spitzen Winkel als auch dem stumpfen Nebenwinkel angehören kann. — Eben so liefert die Gleichung (2) für den Winkel B, da $\sqrt{b^2 - h^2}$ eben sowohl positiv als negativ sein kann, zwei Werthe. Dasselbe gilt auch noch von der fehlenden Seite BC, wenn wir dieselbe unmittelbar durch die gegebenen Stücke b, c und h ausdrücken. Es ist nämlich bekanntlich

$$BC^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Vermöge Gleichung (1) ist
$$\sin A = \frac{h}{b},$$

folglich
$$\cos A = \pm \sqrt{1 - \sin A^2} = \pm \sqrt{1 - \frac{h^2}{b^2}} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - h^2}}{b}.$$

Setzen wir diesen Werth ein, so erhalten wir

$$BC^2 = b^2 + c^2 \pm 2c\sqrt{b^2 - h^2}.$$

*§. 97, a. Aufgabe.

Ein Dreieck zu zeichnen und trigonometrisch aufzulösen, von welchem die Höhe = h und die Winkel an der Grundlinie = α und β gegeben sind.

I. Geometr. Auflösung. Auf einer beliebigen Linie errichten wir ein Lot CD = h, Fig. 15, und ziehen durch den Endpunkt C zwei dieselbe

in A und B schneidende Linien so, daß die eine AC mit AB nach der einen Seite hin einen Winkel CAB $= \alpha$ und die andere BC mit AB nach der entgegengesetzten Seite hin einen Winkel ABC $= \beta$ bildet*); dann ist ABC das verlangte Dreieck.

II. Trigonometr. Auflösung. Wir können zunächst die rechtwinkligen Dreiecke ACD und BCD auflösen; in dem Dreiecke ACD kennen wir die Cathete CD = a und den gegenüberliegenden spitzen Winkel CAD $= \alpha$; wir erhalten hieraus die Hypotenuse AC durch die Gleichung

$$1)\ AC = \frac{h}{\sin \alpha}.$$

Eben so ergibt sich aus dem Dreiecke BCD

$$2)\ BC = \frac{h}{\sin \beta}.$$

Jetzt sind wir auch im Stande, das Dreieck ABC selbst aufzulösen, da wir in demselben alle Winkel, nämlich BAC $= \alpha$, ABC $= \beta$ und folglich auch Winkel ACB $= 180^0 - (\alpha + \beta)$, welchen wir der Kürze wegen mit γ bezeichnen wollen, ferner zwei Seiten AC und BC, als bereits berechnet, kennen. Wir erhalten nun die noch fehlende Seite AB nach dem Sinussatze durch die Gleichung $AB = \frac{AC \sin \gamma}{\sin \beta}$

oder, wenn wir aus (1) den Werth von AC ersetzen,

$$3)\ AB = \frac{h \sin \gamma}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}.$$

Aus der zuletzt aufgeführten Gleichung ergibt sich die Proportion

$$h : AB = \sin \alpha \cdot \sin \beta : \sin \gamma$$

d. h. in jedem Dreiecke verhält sich die Höhe zur Grundlinie wie das Product der Sinus der Winkel an der Grundlinie zum Sinus des Winkels an der Spitze.

§. 97, b. Aufgabe.

Ein Dreieck zu zeichnen und trigonometrisch aufzulösen, von welchem die Winkel an der Grundlinie $= \alpha$ und β und der Unterschied der Segmente, in welche die Grundlinie durch die Höhe getheilt wird, = e gegeben sind.

I. Geometr. Auflösung. Man zeichne eine Linie BD = e, Fig. 31, lege an dieselbe in dem einen Endpunkte B den kleinern Winkel β und in dem andern Endpunkte D an die Verlängerung derselben den größern Winkel α an, beschreibe ferner um den Punkt C, in welchem sich die Schenkel dieser Winkel schneiden, mit CD einen Kreis, welcher die verlängerte BD in A trifft und verbinde endlich A mit C; so ist ABC das verlangte Dreieck.

Beweis. Denn Winkel CAD ist = ADC $= \alpha$, weil AC = DC gemacht ist, ferner Winkel ABC $= \beta$ nach der Construction, und wenn wir die Höhe CG ziehen, so ist AG = DG, folglich BG — AG = BD, welches = e gemacht ist.

II. Trigonometr. Auflösung. Das Dreieck BCD, welches wir zuerst gezeichnet haben, lösen wir auch zuerst auf. Wir kennen nämlich in demselben die Seite BD = e, den Winkel B $= \beta$ und den Winkel BDC, als Nebenwinkel von α. Es ergibt sich hieraus zunächst Winkel BCD = ADC — ABC $= \alpha - \beta$, ferner nach dem Sinussatze

*) S. Planimetrie §. 95.

$$1)\ BC = \frac{BD \,.\, \sin BDC}{\sin BCD} = \frac{e \sin \alpha}{\sin(\alpha - \beta)}$$

und

$$2)\ AC = CD = \frac{BD \,.\, \sin CBD}{\sin BCD} = \frac{e \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

Wir vermögen nun auch das Dreieck ABC selbst aufzulösen, da wir in demselben alle Winkel $A = \alpha$, $B = \beta$ und $C = 180^0 - (\alpha + \beta)$, wofür wir kürzer γ setzen wollen, und zwei Seiten AC und BC kennen. Wir erhalten aus dem Dreiecke ABC die noch fehlende Grundlinie AB durch die Gleichung

$$AB = \frac{BC \,.\, \sin \gamma}{\sin \alpha}$$

oder, wenn wir aus Gleichung (1) den Werth von BC einsetzen,

$$3)\ AB = \frac{e \sin \gamma}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

Die zuletzt erhaltene Gleichung läßt sich auch in Form der folgenden Proportion schreiben:

$$AB : e = \sin \gamma : \sin(\alpha - \beta).$$

Bezeichnen wir die Segmente BG und AG beziehlich mit p und q, ersetzen wir ferner $\alpha - \beta$ durch 2ϑ und γ durch $180^0 - 2\sigma$, folglich $\sin \gamma$ durch $\sin 2\sigma$, so verwandelt sich die vorstehende Proportion in:

$$p + q : p - q = \sin 2\sigma : \sin 2\vartheta$$

d. h. die Summe der Segmente verhält sich zu ihrer Differenz wie der Sinus der Summe der Winkel an der Grundlinie zu dem Sinus der Differenz dieser Winkel.

§. 98. Aufgabe.

Ein Dreieck zu zeichnen und trigonometrisch aufzulösen, wenn von demselben der Winkel an der Spitze $= \gamma$, die Halbirungslinie desselben $= 1$ und das Verhältniß der einschließenden Seiten $= m : n$ gegeben sind.

I. Geometr. Auflösung. Man zeichne einen Winkel $DCE = \gamma$, Fig. 32, mache die Schenkel desselben $CD = n$ und $CE = m$ und ziehe DE. Hierauf halbire man den Winkel DCE durch eine Linie, welche DE in G schneidet, trage auf diese Linie von C aus die gegebene Linie $1 = CF$ auf und ziehe endlich durch F AB || DE; dann ist ABC das verlangte Dreieck.

Beweis. Denn es enthält den Winkel $ACB = \gamma$ und die Halbirungslinie $CF = 1$ nach der Construction. Da ferner AB || DE ist, so verhält sich

$$BC : AC = CE : CD = m : n.$$

II. Trigonometr. Auflösung. Wir lösen zuerst das Dreieck CDE auf, welches wir auch zuerst gezeichnet haben. Wir kennen darin zwei Seiten $CE = m$, $CD = n$ und den eingeschlossenen Winkel $DCE = \gamma$. Wir bestimmen daher zunächst die halbe Summe der fehlenden Winkel D und E, welche wir mit σ bezeichnen, durch die Gleichung

$$\sigma = \frac{180^0 - \gamma}{2}$$

und erhalten dann weiter die halbe Differenz derselben, welche wir, ϑ nennen nach dem Tangentensatze durch die Gleichung

$$\tan \vartheta = \frac{(m - n)\ \tan \sigma}{m + n}.$$

Dann ist $D = \sigma + \vartheta$, $E = \sigma - \vartheta$, also auch, da $A = D$ und $B = E$ ist, 1) $A = \sigma + \vartheta$ und 2) $B = \sigma - \vartheta$.
Wir kennen jetzt in den Dreiecken AFC und BFC eine Seite $CF = l$ und alle Winkel; wir berechnen hieraus

$$AC = \frac{l \sin AFC}{\sin A} \text{ und } BC = \frac{l \sin BFC}{\sin B}.$$

Da $\sin AFC = \sin BFC$ und Winkel $BFC = A + \frac{1}{2}\gamma$ ist, so können wir sowohl $\sin AFC$ als auch $\sin BFC$ durch $\sin (A + \frac{1}{2}\gamma)$ ersetzen. Durch diese Substitution verwandeln sich die vorstehenden Gleichungen in

$$3)\ AC = \frac{l \sin (A + \frac{1}{2}\gamma)}{\sin A} \text{ und } 4)\ BC = \frac{l \sin (A + \frac{1}{2}\gamma)}{\sin B}.$$

Wir erhalten endlich die noch fehlende Seite AB aus dem Dreieck ABC, in welchem uns bereits alle Winkel und zwei Seiten bekannt sind, nach dem Sinussatze durch die Gleichung

$$AB = \frac{BC \sin \gamma}{\sin A}$$

oder, wenn wir den Werth von BC aus der Gleichung (4) einsetzen,

$$5)\ AB = \frac{l \sin (A + \frac{1}{2}\gamma) . \sin \gamma}{\sin A . \sin B}.$$

§. 99. Aufgabe.

Ein Dreieck zu zeichnen und trigonometrisch aufzulösen, von welchem zwei Seiten = a und b und die Mittellinie, d. h. die Linie, welche die Spitze mit der Mitte der Grundlinie verbindet, = t gegeben sind.

I. Geometr. Auflösung. Es sei ABC, Fig. 33, das zu zeichnende Dreieck; vervollständigen wir dasselbe zu dem Parallelogramme ACBE, so entstehen die Dreiecke ACE und BCE, in welchen, wie leicht zu sehen, alle drei Seiten bekannt sind. Wir erhalten daher das verlangte Dreieck, indem wir zuerst ein Dreieck ACE zeichnen, in welchem Seite $AC = b$, $AE = a$ und $CE = 2t$ ist, hierauf den Punkt A mit der Mitte D der Linie CE verbinden, die Linie AD über D um ihre eigene Länge bis B verlängern und B mit C verbinden.

Beweis. Nach der Construction ist die Mittellinie $CD = t$ und Seite $AC = b$. Ferner ist das $\triangle ADE \cong BDC$ ($AD = BD$, $DE = CD$, Winkel $ADE = BDC$), folglich $BC = AE = a$.

II. Trigonometr. Auflösung. In dem Dreiecke ACE kennen wir die drei Seiten $AC = b$, $AE = a$, $CE = 2t$; wir können daher Winkel CAE nach der Cotangentenformel des §. 68 berechnen. Setzen wir zu diesem Zwecke $\frac{1}{2}(a + b + 2t) = p$, und erwägen wir ferner, daß Winkel CAE $= 180^0 - ACB = 180^0 - \gamma$, also $\frac{1}{2}CAE = 90^0 - \frac{1}{2}\gamma$ und $\operatorname{cotg} \frac{1}{2}CAE = \operatorname{tang} \frac{1}{2}\gamma$ ist, so erhalten wir die Gleichung

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{p(p - 2t)}{(p - a)\ (p - b)}}.$$

Da wir jetzt in dem Dreiecke ABC zwei Seiten $AC = b$ und $BC = a$

und den eingeschlossenen Winkel C kennen, so ergeben sich die noch fehlenden Stücke durch die Gleichungen des §. 66:

$$\sigma = 90^0 - {}^1/_2\gamma$$

$$\tang \vartheta = \frac{(a - b) \tang \sigma}{a + b}$$

$$A = \sigma + \vartheta,\ B = \sigma - \vartheta,$$

$$AB = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

Die Grundlinie AB, welche wir der Kürze wegen mit c bezeichnen wollen, läßt sich auch noch leicht unmittelbar durch die gegebenen Stücke ausdrücken. Es ist nämlich in dem Parallelogramm ABCE nach 62, Anm.

$$c^2 + 4t^2 = 2a^2 + 2b^2,$$

folglich $$c^2 = 2a^2 + 2b^2 - 4t^2.$$

In ähnlicher Art wie die vorhergehenden Aufgaben lassen sich außer vielen andern die in der folgenden Zusammenstellung aufgeführten Aufgaben lösen, in welchen wir der Kürze wegen die drei Seiten des Dreiecks mit a, b, c, die ihnen gegenüberliegenden Winkel mit α, β, γ, die Höhe mit h, den Unterschied der Segmente, in welche sie die Grundlinie theilt, mit e, die Mittellinie mit t, die Halbirungslinie des Winkels an der Spitze mit l, ferner die aus den Endpunkten der Grundlinie auf die Seiten a und b gefällten Lote beziehlich mit h′ und h″ bezeichnet haben:

1)	h, a, b	14)	l, α, β
2)	h, α, c	15)	l, α, b
3)	h, α, a	16)	l, γ, a
4)	h, a, γ	17)	e, a, b
5)	h, t, α	18)	e, a, α
6)	h, t, a	19)	e, a, β
7)	h, t, c	20)	e, a, $\alpha - \beta$
8)	h, l, γ	21)	a, b, $\alpha - \beta$
9)	h, l, α	22)	h′, h″, γ
10)	h, l, a	23)	h′, h″, c
11)	t, γ, a	24)	h′, c, t
12)	t, α, b	25)	h′, β, t
13)	t, α, c	26)	h′, γ, l

27) Die Mittellinie t und die Winkel, welche sie mit den Seiten bildet.

28) Die Mittellinie t, eine Seite a und der Winkel, welchen sie mit der andern Seite b bildet.

§. 100, a. Aufgabe.

Ein Dreieck zu zeichnen und trigonometrisch aufzulösen, von welchem der Umfang $= 2p$ und zwei Winkel α und β, also auch der dritte Winkel, welchen wir mit γ bezeichnen wollen, gegeben sind.

I. Geometr. Auflösung. Man ziehe eine Linie $DE = 2p$, Fig. 34, lege an dieselbe in D den Winkel ${}^1/_2\alpha = CDE$ und in E den Winkel ${}^1/_2\beta = CED$, ferner in dem Punkte C, in welchem sich die Schenkel dieser Winkel schneiden, an CD nochmals den Winkel ${}^1/_2\alpha = ACD$ und an CE den Winkel ${}^1/_2\beta = BCE$ an; dann ist ABC das verlangte Dreieck.

Beweis. Denn zunächst ist Winkel $CAB = ADC + ACD = {}^1/_2\alpha + {}^1/_2\alpha = \alpha$; eben so ist Winkel $ABC = BEC + BCE = {}^1/_2\beta + {}^1/_2\beta$

$= \beta$. Da ferner Winkel ADC = ACD und BEC = BCE gemacht ist, so ist AC = AD und BC = BE, folglich AC + AB + BC = DE = 2p.

II. Trigonometr. Auflösung. A) Synthetisch. In dem zuerst gezeichneten Dreiecke CDE kennen wir eine Seite DE = 2p und die beiden anliegenden Winkel CDE = $^1/_2\alpha$ und CED = $^1/_2\beta$; wir berechnen hieraus

$$CD = \frac{2p \,.\, \sin {}^1/_2\beta}{\sin DCE} \text{ und } CE = \frac{2p \,.\, \sin {}^1/_2\alpha}{\sin DCE}.$$

Der Winkel DCE ist = $180^0 - (^1/_2\alpha + {}^1/_2\beta)$, folglich sin DCE = sin $(^1/_2\alpha + {}^1/_2\beta) = \cos {}^1/_2\gamma$, da $^1/_2\alpha + {}^1/_2\beta$ und $^1/_2\gamma$ sich zu 90^0 ergänzen. Hiernach verwandeln sich die obigen Ausdrücke in

$$CD = \frac{2p \,.\, \sin {}^1/_2\beta}{\cos {}^1/_2\gamma} \text{ und } CE = \frac{2p \,.\, \sin {}^1/_2\alpha}{\cos {}^1/_2\gamma}.$$

Nun sind in den gleichschenkligen Dreiecken ACD und BCE die Grundlinien CD und CE und alle Winkel bekannt; wir finden hieraus, (indem wir uns aus den Spitzen A und B Lote auf die Grundlinien CD und CE gefällt denken), die Seiten

$$AC = \frac{CD}{2 \cos {}^1/_2\alpha} \text{ und } BC = \frac{CE}{2 \cos {}^1/_2\beta}$$

oder, wenn wir die oben für CD und CE erhaltenen Werthe einsetzen,

$$AC = \frac{p \,.\, \sin {}^1/_2\beta}{\cos {}^1/_2\alpha \,.\, \cos {}^1/_2\gamma} \text{ und } BC = \frac{p \,.\, \sin {}^1/_2\alpha}{\cos {}^1/_2\beta \,.\, \cos {}^1/_2\gamma}.$$

Wir können diese Gleichungen in Worten dahin aussprechen: die Seite eines Dreiecks ist gleich dem halben Umfange multiplicirt mit dem Sinus des halben gegenüberliegenden Winkels und dividirt durch das Product der Cosinus der halben anliegenden Winkel. Da dieselbe Regel offenbar auch für die dritte Seite gelten muß, so werden wir sofort setzen können:

$$AB = \frac{p \,.\, \sin {}^1/_2\gamma}{\cos {}^1/_2\alpha \cos {}^1/_2\beta}.$$

B) Analytisch. Wenn wir der Kürze wegen die Seiten des Dreiecks mit a, b und c bezeichnen, so erhalten wir unmittelbar aus der Aufgabe die Gleichung

$$1)\quad a + b + c = 2p.$$

Fügen wir hierzu die trigonometrischen Gleichungen

$$2)\quad b : a = \sin\beta : \sin\alpha$$

und

$$3)\quad c : a = \sin\gamma : \sin\alpha,$$

so haben wir drei einfache Gleichungen mit drei Unbekannten a, b und c. Wir lösen dieselben auf, indem wir aus (2) und (3) die Werthe von b und c in (1) einsetzen. Wir erhalten so:

$$a + \frac{a \sin\beta}{\sin\alpha} + \frac{a \sin\gamma}{\sin\alpha} = 2p$$

oder, wenn wir die ganze Gleichung mit sin α multipliciren,

$$a \sin\alpha + a \sin\beta + a \sin\gamma = 2p \,.\, \sin\alpha,$$

folglich

$$a = \frac{2p \,.\, \sin\alpha}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}.$$

Aus (2) und (3) ergibt sich weiter

$$b = \frac{2p \,.\, \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}$$

und

$$c = \frac{2p \,.\, \sin\gamma}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}.$$

Daß die hier erhaltenen Ausdrücke von den in der synthetischen Auflösung gefundenen Werthen nur in der Form verschieden sind, die einen sich in die andern verwandeln lassen, haben wir bereits oben in der Anmerkung zu §. 40 dargethan.

§. 100, b. Zusatz.

Wenn wir aus dem Umfange und den drei Winkeln den Inhalt J des Dreiecks berechnen sollen, so erhalten wir zunächst aus §. 69 die Gleichung

$$J = {}^1/_2 AC \,.\, BC \,.\, \sin \gamma;$$

und wenn wir für AC und BC die in der synthetischen Auflösung gewonnenen Werthe einsetzen und zugleich berücksichtigen, daß nach §. 30, b $\sin \gamma = 2 \sin {}^1/_2\gamma \cos {}^1/_2\gamma$ ist, so ergibt sich

$$J = \frac{p^2 \sin {}^1/_2\alpha \sin {}^1/_2\beta \sin {}^1/_2\gamma}{\cos {}^1/_2\alpha \cos {}^1/_2\beta \cos {}^1/_2\gamma}$$

oder

$$J = p^2 \operatorname{tang} {}^1/_2\alpha \operatorname{tang} {}^1/_2\beta \operatorname{tang} {}^1/_2\gamma.$$

Zufolge des in der Anm. zu §. 40 angeführten Satzes fällt das Product $\operatorname{tang} {}^1/_2\alpha \operatorname{tang} {}^1/_2\beta \operatorname{tang} {}^1/_2\gamma$ dann am größten aus, wenn ${}^1/_2\alpha = {}^1/_2\beta = {}^1/_2\gamma$ ist. Unter allen Dreiecken von gleichem Umfange hat daher das gleichseitige den größten Inhalt und folglich auch den größten Radius des einbeschriebenen, aber den kleinsten Radius des umbeschriebenen Kreises, wie sich leicht aus der Gleichung (1) des §. 85, a ergibt. $2p = r(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$

In ähnlicher Art wie die vorhergehenden Aufgaben sind die folgenden zu behandeln:

Ein Dreieck zu zeichnen und trigonometrisch aufzulösen, von welchem gegeben sind: zwei Winkel und

1) die Summe oder
2) die Differenz der beiden Seiten,
3) der Unterschied zwischen der Summe der beiden Seiten und der Grundlinie.

§. 101. Aufgabe.

Von einem Dreiecke ist ein Winkel CAB, Fig. 37, $= \alpha$, eine anliegende Seite AC = b und die Summe der beiden anderen Seiten AB + BC = f gegeben. Es sollen hieraus die fehlenden Stücke trigonometrisch berechnet und das Dreieck gezeichnet werden.

I. Geometr. Auflösung. Man zeichne einen Winkel $A = \alpha$, mache den einen Schenkel AC = b, den andern Schenkel AD = f und ziehe CD; hierauf lege man in C an CD den entstandenen Winkel ADC = BCD an; so ist ABC das verlangte Dreieck.

Beweis. Denn die Seite AC ist = b und der Winkel CAB $= \alpha$ nach der Construction; die Seite BC ist aber = BD, weil Winkel BDC = BCD gemacht ist; folglich ist AB + BC = AD = f.

II. Trigonom. Auflösung. A) Synthetisch. In dem zuerst gezeichneten Dreiecke ADC kennen wir zwei Seiten AC = b, AD = f und den eingeschlossenen Winkel CAD $= \alpha$. Wenden wir also auf dasselbe den Tangentensatz (§. 65) an, so erhalten wir:

$$\operatorname{tang} \frac{ACD - ADC}{2} : \operatorname{tang} \frac{ACD + ADC}{2} = f - b : f + b.$$

Nun ist aber ACD — ADC = ACB, wofür wir kürzer C setzen wollen; ferner ist $ACD + ADC = 180^0 - \alpha$, also $\operatorname{tang} \frac{ACD + ADC}{2} = \operatorname{tang} (90^0 - {}^1/_2\alpha)$

$= \text{cotg}\ {}^1/_2\alpha$. Die eben aufgestellte Proportion geht also über in:

$$\text{tang}\ {}^1/_2\,C : \text{cotg}\ {}^1/_2\alpha = f - b : f + b,$$

woraus $$1)\ \text{tang}\ {}^1/_2 C = \frac{(f - b)\ \text{cotg}\ {}^1/_2\alpha}{f + b}$$ folgt.

Ist aus dieser Gleichung ${}^1/_2 C$, mithin auch C bestimmt, so ist

$$2)\ B = 180^0 - (\alpha + C)$$

und aus dem Dreiecke ABC, in welchem wir jetzt eine Seite $AC = b$ und alle Winkel kennen,

$$3)\ BC = \frac{b\ .\ \sin\alpha}{\sin B};\quad 4)\ AB = \frac{b\ .\ \sin C}{\sin B}.$$

B. Analytisch. 1) Berechnung der Winkel. Um zu einer Gleichung für die zu bestimmenden Winkel zu gelangen, drücken wir die Seiten BC und AB, deren Summe uns $= f$ gegeben ist, nach dem Sinussatze durch die gegebene Seite b und die zu bestimmenden Winkel aus und erhalten dadurch die Gleichung

$$\frac{b \sin\alpha}{\sin B} + \frac{b \sin C}{\sin B} = f$$

oder $$b\,(\sin\alpha + \sin C) = f \sin B.$$

Da $B = 180^0 - (\alpha + C)$, mithin $\sin B = \sin\,(\alpha + C)$ ist, so erhalten wir weiter $$b\ (\sin\alpha + \sin C) = f\ \sin\,(\alpha + C)$$

oder nach §§. 33 u. 30,b $$2b \sin\frac{\alpha + C}{2}\cdot\cos\frac{\alpha - C}{2} = 2f \sin\frac{\alpha + C}{2}\cdot\cos\frac{\alpha + C}{2},$$

woraus $$b\ \cos\frac{\alpha - C}{2} = f \cos\frac{\alpha + C}{2}$$

oder entwickelt $$b \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{C}{2} + b \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{C}{2} = f \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{C}{2} - f \sin\frac{\alpha}{2}\,.\,\sin\frac{C}{2}$$

weiter folgt. Dividiren wir beide Seiten der Gleichung durch $\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{C}{2}$, so ergibt sich $b + b\ \text{tang}\frac{\alpha}{2}\text{tang}\frac{C}{2} = f - f\,\text{tang}\frac{\alpha}{2}\,\text{tang}\frac{C}{2}$;

mithin ist $$\text{tang}\frac{\alpha}{2}\,.\,\text{tang}\frac{C}{2}\,(f + b) = f - b,$$

also $$\text{tang}\ {}^1/_2 C = \frac{f - b}{(f + b)\ \text{tang}\ {}^1/_2\alpha},$$

ein Resultat, welches mit dem durch die synthetische Auflösung gewonnenen übereinstimmt, da es einerlei bleibt, ob man durch tang ${}^1/_2\alpha$ dividirt oder mit cotg ${}^1/_2\alpha$ multiplicirt. Ist aber aus dieser Gleichung ${}^1/_2 C$ mithin auch C bestimmt, so ist $B = 180^0 - (\alpha + C)$ und die noch fehlenden Seiten können nach den oben aufgestellten Gleichungen (3) und (4) berechnet werden.

2) Berechnung der Seiten. Wir können jedoch die fehlenden Seiten BC und AC auch direct aus den gegebenen Stücken b, f, α erhalten. Zu diesem Zwecke setzen wir $BC = x$ und $AB = y$. Dann ergibt sich aus der Aufgabe selbst zunächst die Gleichung $1)\ x + y = f$

und nach dem erweiterten pythagoräischen Lehrsatze der Trigonometrie

$$2)\ x^2 = b^2 + y^2 - 2by \cos\alpha.$$

Setzen wir den Werth von $x\,(= f - y)$ aus der ersten Gleichung in die zweite, so verwandelt sich dieselbe in

$$f^2 - 2fy + y^2 = b^2 + y^2 - 2by \cos\alpha$$

oder
$$f^2 - b^2 = 2fy - 2by \cos \alpha,$$
folglich
$$y = \frac{f^2 - b^2}{2f - 2b \cos \alpha}$$
und
$$x = f - y = f - \frac{f^2 - b^2}{2f - 2b \cos \alpha}$$
$$= \frac{f^2 + b^2 - 2bf \cos \alpha}{2f - 2b \cos \alpha}.$$

Dieser für x erhaltene Werth kann auch leicht unmittelbar aus der Figur abgeleitet werden. Der Zähler des vorstehenden Bruches ist nämlich, wie leicht zu sehn, $= CD^2$; denken wir uns nun noch aus C auf AD ein Lot CZ gefällt, so ist der Nenner = 2DZ. Es geht daher die zuletzt erhaltene Gleichung über in
$$x = \frac{CD^2}{2DZ} \text{ oder } 2x : CD = CD : DZ,$$
eine Proportion, deren Richtigkeit sich leicht ergibt, wenn wir um B mit BC einen Halbkreis beschreiben, welcher (die verlängerte) AB in U durchschneidet und C mit U verbinden. Dann ist 2x = DU die Hypotenuse und CD die Cathete des entstandenen rechtwinkligen Dreiecks DCU, DZ aber der der Cathete CD anliegende Abschnitt der Hypotenuse.

In ähnlicher Art sind die Aufgaben zu behandeln, wenn von einem Dreieck gegeben sind:

1) eine Seite, der Unterschied der beiden andern Seiten und der der größern oder
2) der der kleineren dieser Seiten gegenüberliegende Winkel;
3) der Unterschied der Segmente, in welche die Grundlinie durch die Höhe getheilt wird, die Summe der Seiten und der der größeren oder
4) der der kleineren Seite gegenüberliegende Winkel;
5) der Unterschied der Segmente, der Unterschied der Seiten und der der größeren oder
6) der der kleineren Seite gegenüberliegende Winkel;
7) die Grundlinie, der Winkel an der Spitze und das Verhältniß der Seiten;
8) der Unterschied der Segmente, der Unterschied der Winkel an der Grundlinie und das Verhältniß der Seiten.

Bemerkung.

Ehe wir zu den folgenden Aufgaben übergehen, schicken wir noch einen Satz voraus, in welchem die Analysis für die meisten derselben enthalten ist.

§. 102. Hilfssatz.

Wenn man mit der kleineren Seite AC eines Dreiecks ABC, Fig. 35, um die Spitze C einen Kreis beschreibt, welcher die Grundlinie AB in D, die Seite BC in E und ihre Verlängerung in F schneidet, ferner AE, AF, CD, DE und DF zieht und der Kürze wegen die Winkel des Dreiecks mit α, β, γ und die ihnen gegenüberliegenden Seiten mit a, b, c bezeichnet, so ist

1) $BF = BC + AC = a + b$
2) $BE = BC - AC = a - b$
3) W. $AFB = \frac{1}{2}ACB = \frac{1}{2}\gamma$
4) W. $ACF = \alpha + \beta = 2\sigma$
5) W. $ADF = AEF = \frac{1}{2}ACF = \frac{\alpha + \beta}{2} = \sigma$
6) W. $BCD = \alpha - \beta = 2\vartheta$
7) W. $EAD = EFD = \frac{1}{2} ECD = \vartheta$
8) W. $FAE = 90^0 = FDE$.

In dem in den Kreis gezeichneten Vierecke ADEF ist W. ADE + AFE = 180°, und da auch ADE + EDB = 180° ist, so ist folglich

9) W. EDB = AFE = $\frac{1}{2}\gamma$.

Endlich wollen wir unsere Leser noch auf die folgende Beziehung, welche weiterhin häufige Anwendung findet, aufmerksam machen: Da die Winkel 2σ und γ sich zu 180°, also Winkel σ und $\frac{1}{2}\gamma$ sich zu 90° ergänzen, so ist

$$\sin\gamma = \sin 2\sigma \text{ und } \cos\gamma = -\cos 2\sigma,$$
$$\sin \tfrac{1}{2}\gamma = \cos\sigma \text{ und } \cos\tfrac{1}{2}\gamma = \sin\sigma.$$

§. 103. Zusatz.

Wenn man in dem Dreiecke ABC, Fig. 31, die Höhe CG zieht und mit AC um C einen Kreis beschreibt, welcher die Grundlinie in D schneidet, so ist

$$BD = BG - AG.$$

Bezeichnen wir noch der Kürze wegen BG mit p, AG mit q und die Höhe CG mit h, so ist in den rechtwinkligen Dreiecken BGC und AGC

$$a^2 = h^2 + p^2$$

und $$b^2 = h^2 + q^2,$$

folglich, wenn wir diese Gleichungen von einander subtrahiren,

$$a^2 - b^2 = p^2 - q^2$$

oder $$(a + b) . (a - b) = (p + q) . (p - q).$$

Wir sprechen diesen Satz, indem wir die Abschnitte, in welche die Grundlinie durch die Höhe getheilt wird, hier so wie im Folgenden die Segmente nennen, dahin aus:

In jedem Dreiecke ist das Rechteck aus der Summe und Differenz der Seiten gleich dem Rechteck aus der Summe und Differenz der Segmente. — Die so eben erwiesene Gleichung läßt sich auch in die Form der folgenden Proportion bringen:

$$a + b : p + q = p - q : a - b$$

d. h. in Figur 35: BF : AB = BD : BE

eine Proportion, deren Richtigkeit bereits in der Planimetrie (§. 200) dargethan ist.

§. 104. Aufgabe.

Ein Dreieck zu zeichnen und trigonometrisch aufzulösen, von welchem die Grundlinie = c, der Unterschied der beiden andern Seiten = d und der Winkel an der Spitze = γ gegeben sind.

I. Geometr. Auflösung. Man zeichne einen Winkel AEC = σ (= 90° − $\frac{1}{2}\gamma$), Fig. 35, verlängere den Schenkel CE über E um EB = d, beschreibe um B mit c einen Kreis, welcher den andern Schenkel dieses Winkels in A schneidet, ziehe AB und lege in A an AE den Winkel σ = CAE nochmals an; so ist ABC das verlangte Dreieck.

Beweis. Denn erstens ist AB = c nach der Construction; da ferner Winkel CAE = CEA gemacht ist, so ist AC = CE, folglich BC — AC = BE = d; endlich ist Winkel CAE + CEA = 2σ, folglich Winkel ACE = 180° − $2\sigma = \gamma$.

II. Trigonometr. Auflösung. A) Synthetisch. Wir lösen zunächst das zuerst gezeichnete Dreieck ABE auf, in welchem wir zwei Seiten AB = c, BE = d und den der ersteren gegenüberliegenden Winkel AEB = 180° − σ kennen. Wir berechnen hieraus den der andern Seite gegenüberliegenden Winkel BAE nach dem Sinussatze durch die Gleichung

$$\sin BAE = \frac{d \sin AEB}{c}.$$

Bekanntlich ist Winkel BAE $= \frac{A - B}{2} = \vartheta$, und da der Sinus eines stumpfen Winkels dem Sinus des spitzen Nebenwinkels gleich ist, sin AEB = sin AEC = sin σ. Setzen wir diese Werthe in die so eben erhaltene Gleichung ein, so verwandelt sich dieselbe in

$$1)\ \sin \vartheta = \frac{d \sin \sigma}{c}.$$

Ist hieraus ϑ gefunden, so ist

$$2)\ A = \sigma + \vartheta \text{ und } B = \sigma - \vartheta.$$

Wir sind nun auch im Stande, das Dreieck ABC selbst aufzulösen, da wir in demselben alle Winkel und eine Seite AB = c kennen. Wir finden daher die noch fehlenden Seiten durch die Gleichungen:

$$3)\ BC = \frac{c \sin A}{\sin \gamma} \text{ und } 4)\ AC = \frac{c \sin B}{\sin \gamma}.$$

B) Analytisch. 1) Berechnung der Winkel. Zufolge der Aufgabe ist

$$BC - AC = d.$$

Da wir die Winkel suchen wollen, so drücken wir die unbekannten Seiten BC und AC durch die gegebene Seite c und die zu berechnenden Winkel des Dreiecks ABC auf bekannte Weise aus. Dann verwandelt sich die vorstehende Gleichung in

$$\frac{c \sin A}{\sin \gamma} - \frac{c \sin B}{\sin \gamma} = d$$

oder

$$\sin A - \sin B = \frac{d \sin \gamma}{c} = \frac{d \sin 2\sigma}{c},$$

da bekanntlich $\sin \gamma = \sin 2\sigma$ ist. — Nach §§. 33 und 30,a können wir die vorstehende Gleichung in die folgende umformen:

$$2 \sin \frac{A - B}{2} \cos \frac{A + B}{2} = \frac{2 d \sin \sigma \cos \sigma}{c}$$

oder

$$2 \sin \vartheta \cos \sigma = \frac{2 d \sin \sigma \cos \sigma}{c},$$

also

$$\sin \vartheta = \frac{d \sin \sigma}{c}.$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich die Proportion

$$d : c = \sin \vartheta : \sin \sigma,$$

d. h. in jedem Dreiecke verhält sich der Unterschied der Seiten zur Grundlinie wie der Sinus der halben Differenz zum Sinus der halben Summe der Winkel an der Grundlinie.

Ist aus der vorstehenden Gleichung ϑ gefunden, so werden die noch fehlenden Stücke eben so wie in der synthetischen Auflösung berechnet.

2) Berechnung der Seiten. Man kann jedoch auch die unbekannten Seiten BC und AC, welche wir mit x und y bezeichnen wollen, unmittelbar durch die gegebenen Stücke c, d und γ ausdrücken. Wir bilden zu diesem Zwecke die Gleichungen

$$1)\ x - y = d,$$

und indem wir den pythagoräischen Lehrsatz auf das Dreieck ABC anwenden,

$$2)\ x^2 + y^2 - 2xy \cos \gamma = c^2.$$

Da in der letzteren Gleichung die Unbekannten x und y symmetrisch vorkommen (sich miteinander vertauschen lassen) und ihre Differenz gegeben ist, so gewinnen

wir an Kürze der Rechnung, wenn wir dieselben nicht unmittelbar, sondern ihre Summe, welche wir mit f bezeichnen wollen, suchen. Da

$$x + y = f \text{ und } x - y = d$$

sein soll, so ist $x = \frac{f + d}{2}$ und $y = \frac{f - d}{2}$,

folglich $x^2 = \frac{f^2 + 2df + d^2}{4}$ und $y^2 = \frac{f^2 - 2df + d^2}{4}$,

also $x^2 + y^2 = \frac{2f^2 + 2d^2}{4}$.

Ferner ist $xy = \frac{f + d}{2} \cdot \frac{f - d}{2} = \frac{f^2 - d^2}{4}$.

Wenn wir diese Werthe in die Gleichung (2) einsetzen, so verwandelt sich dieselbe in:

$$\frac{2f^2 + 2d^2}{4} - \frac{2(f^2 - d^2)}{4} \cdot \cos\gamma = c^2$$

oder $f^2 + d^2 - (f^2 - d^2)\cos\gamma = 2c^2$

oder $f^2 - f^2\cos\gamma + d^2 + d^2\cos\gamma = 2c^2$

oder $f^2(1 - \cos\gamma) + d^2(1 + \cos\gamma) = 2c^2$.

Nach §. 30, b ist $1 - \cos\gamma = 2\sin{}^1/_2\gamma^2$ und $1 + \cos\gamma = 2\cos{}^1/_2\gamma^2$. Setzen wir diese Werthe in die vorstehende Gleichung ein, so erhalten wir weiter

$$2f^2\sin{}^1/_2\gamma^2 + 2d^2\cos{}^1/_2\gamma^2 = 2c^2,$$

also $f^2 = \frac{c^2 - d^2\cos{}^1/_2\gamma^2}{\sin{}^1/_2\gamma^2}$

und folglich $f = \frac{\sqrt{c^2 - d^2\cos{}^1/_2\gamma^2}}{\sin{}^1/_2\gamma}$.

Demnach ist $x = \frac{+d + f}{2} = \frac{d\sin{}^1/_2\gamma + \sqrt{c^2 - d^2\cos{}^1/_2\gamma^2}}{2\sin{}^1/_2\gamma}$

und $y = \frac{-d + f}{2} = \frac{-d\sin{}^1/_2\gamma + \sqrt{c^2 - d^2\cos{}^1/_2\gamma^2}}{2\sin{}^1/_2\gamma}$.

Die so eben durch algebraische Rechnung erhaltenen Werthe von x und y lassen sich auch leicht auf synthetischem Wege herleiten. Ziehen wir nämlich in Fig. 36 aus B auf die verlängerte AE die Senkrechte BH, so ist Winkel $BEH = AEC = \sigma = 90^0 - {}^1/_2\gamma$, folglich in dem rechtwinkligen △ BHE $BH = d\sin\sigma = d\cos{}^1/_2\gamma$ und $EH = d\sin{}^1/_2\gamma$, daher in dem rechtwinkligen △ AHB

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{c^2 - d^2\cos{}^1/_2\gamma^2}$$

und $AE = -EH + AH = -d\sin{}^1/_2\gamma + \sqrt{c^2 - d^2\cos{}^1/_2\gamma^2}$.

In dem gleichschenkligen Dreieck ACE ist

$$AC = \frac{AE}{2\sin{}^1/_2\gamma} = \frac{-d\sin{}^1/_2\gamma + \sqrt{c^2 - d^2\cos{}^1/_2\gamma^2}}{2\sin{}^1/_2\gamma},$$

was mit dem oben für y erhaltenen Werthe übereinstimmt. Ist aber y gefunden, so ist

$$x = d + y.$$

In ganz ähnlicher Art wie die vorhergehende Aufgabe können die folgenden behandelt werden. Ein Dreieck zu zeichnen und trigonometrisch aufzulösen, wenn von demselben gegeben sind:

1) die Grundlinie, der Winkel an der Spitze und die Summe der einschließenden Seiten;

2) der Unterschied der Segmente = e, der Unterschied der Winkel an der Grundlinie = 2ϑ und die Summe der beiden Seiten;

3) e, 2ϑ und die Differenz der Seiten;

4) die Mittellinie, der Winkel an der Spitze und die Summe oder

5) die Differenz der Seiten.

§. 105. Aufgabe.

Ein Dreieck zu zeichnen und trigonometrisch aufzulösen, von welchem der Winkel an der Spitze = γ, der Unterschied der einschließenden Seiten = d und der Unterschied der Segmente = e gegeben ist.

I. Geometr. Auflösung. Man zeichne einen Winkel EDB = $^1/_2\gamma$, Fig. 35, mache den einen Schenkel BD = e und beschreibe um B mit d einen Kreis, welcher den andern Schenkel in zwei Punkten durchschneidet. Den D zunächst liegenden Durchschnittspunkt E *) verbinde man mit B, verlängere dann BE über E und trage den entstandenen Außenwinkel im Punkte D an DE an, so daß also Winkel CDE = CED wird. Endlich beschreibe man mit CD (oder CE) einen Kreis um C, welcher die verlängerte BD in A schneidet, und ziehe AC; so ist ABC das verlangte Dreieck.

Beweis. Denn BD ist = e gemacht und, wie leicht zu sehen, BC — AC = BE = d. Da ferner Winkel BDE = $^1/_2\gamma$ gemacht ist, so ist sein Nebenwinkel ADE = $180^0 - {}^1/_2\gamma$; verlängern wir nun noch BC über C hinaus, bis die Verlängerung den um C mit AC beschriebenen Kreis in F durchschneidet, und ziehen AF, so ist in dem Kreise das Viereck ADEF entstanden und in demselben Winkel ADE + AFE = 180^0, also, da Winkel ADE = $180^0 - {}^1/_2\gamma$ ist, Winkel AFE = $^1/_2\gamma$ und folglich der Centriwinkel ACE = γ.

II. Trigonometr. Auflösung. A) Synthetisch. Wir lösen zunächst das Dreieck BDE auf, welches wir auch zuerst gezeichnet haben; in demselben kennen wir zwei Seiten BD = e, BE = d und den der einen gegenüberliegenden Winkel BDE = $^1/_2\gamma$. Wir erhalten den der andern Seite gegenüberliegenden Winkel BED nach dem Sinussatze durch die Gleichung

$$\sin BED = \frac{e \cdot \sin BDE}{d}.$$

Da der Sinus eines stumpfen Winkels gleich dem Sinus des spitzen Nebenwinkels ist, so ist sin BED = sin DEF; bezeichnen wir ferner den Unterschied der gesuchten Winkel A und B mit 2ϑ, so ist bekanntlich Winkel DFE = ϑ, und da Winkel FDE, als Winkel im Halbkreise, = 90^0 ist, so ist Winkel DEF = $90^0 - \vartheta$, also sin BED = sin DEF = $\sin(90^0 - \vartheta) = \cos\vartheta$. Wenn wir ferner die Summe der gesuchten Winkel mit 2σ bezeichnen, so ist sin BDE = $\sin {}^1/_2\gamma = \cos\sigma$, da $^1/_2\gamma$ und σ sich zu 90^0 ergänzen. Demnach läßt sich die obige Gleichung kürzer also schreiben:

$$1)\quad \cos\vartheta = \frac{e \cos\sigma}{d}.$$

Ist aber aus dieser Gleichung ϑ gefunden, so ist Winkel

$$2)\quad A = \sigma + \vartheta \text{ und } B = \sigma - \vartheta.$$

*) Auch der andere Durchschnittspunkt ließe sich zur Zeichnung des gesuchten Dreiecks benutzen; das hierdurch entstehende Dreieck ist jedoch dem Dreiecke ABC congruent.

Wir kennen nun in dem Dreiecke BCD alle Winkel und eine Seite e. Wir erhalten hieraus Seite

$$3)\quad BC = \frac{e \sin BDC}{\sin BCD} = \frac{e \sin A}{\sin 2\vartheta}$$

und

$$4)\quad AC = CD = \frac{e \sin DBC}{\sin BCD} = \frac{e \sin B}{\sin 2\vartheta}.$$

Endlich berechnen wir die noch fehlende Grundlinie AB aus dem Dreiecke ABC durch die Gleichung

$$AB = \frac{AC \,.\, \sin C}{\sin B}$$

oder, wenn wir den für AC erhaltenen Werth einsetzen,

$$5)\quad AB = \frac{e \sin B \sin C}{\sin 2\vartheta \sin B} = \frac{e \sin 2\sigma}{\sin 2\vartheta},$$

indem wir um größerer Symmetrie willen sin C durch sin 2σ ersetzen.

B) Analytisch. 1) Berechnung der Winkel. Zufolge der Aufgabe ist

$$a - b = d.$$

Drücken wir a und b aus dem Dreiecke BCD aus, in welchem die Seite BD = e gegeben ist, so verwandelt sich diese Gleichung in

$$\frac{e \sin A}{\sin 2\vartheta} - \frac{e \sin B}{\sin 2\vartheta} = d$$

oder

$$e(\sin A - \sin B) = d \sin 2\vartheta.$$

Nach §§. 33 und 30,a können wir hierfür auch setzen

$$2e \cos\sigma \sin\vartheta = 2d \sin\vartheta \cos\vartheta,$$

also

$$\cos\vartheta = \frac{e \cos\sigma}{d}.$$

Aus dieser Gleichung geht die Proportion hervor:

$$d : e = \cos\sigma : \cos\vartheta,$$

d. h. der Unterschied der Seiten verhält sich zum Unterschiede der Segmente wie der Cosinus der halben Summe zum Cosinus der halben Differenz der Winkel an der Grundlinie.

Nachdem aus der zuletzt erhaltenen Gleichung ϑ gefunden ist, können wir die fehlenden Seiten des Dreiecks so wie in der synthetischen Auflösung berechnen.

2) Berechnung der Seiten. Wenden wir auf das Dreieck ABC, in welchem der Winkel ACB = γ gegeben ist, den pythagoräischen Lehrsatz an und bezeichnen die gesuchten Seiten BC und AC mit x und y, die Grundlinie AB aber mit z, so erhalten wir die Gleichung

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos\gamma$$

oder, da nach §. 103 $(x + y) . (x - y) = e . z$,

also $z = \frac{(x - y) . (x + y)}{e} = \frac{d(x + y)}{e}$, ferner $\cos\gamma = -\cos 2\sigma$ ist,

$$\frac{d^2 (x + y)^2}{e^2} = x^2 + y^2 + 2xy \cos 2\sigma.$$

Da in dieser Gleichung x und y symmetrisch vorkommen, so wird die Rechnung vereinfacht, wenn wir zunächst ihre Summe $x + y = f$ suchen. Setzen wir demgemäß

$$x = \frac{f + d}{2} \text{ und } y = \frac{f - d}{2},$$

so ist $$x^2 + y^2 = \frac{2f^2 + 2d^2}{4} \text{ und } x \, . \, y = \frac{f^2 - d^2}{4}.$$

Hiernach verwandelt sich die vorhergehende Gleichung in

$$\frac{d^2 f^2}{e^2} = \frac{2f^2 + 2d^2}{4} + \frac{2\,(f^2 - d^2)\cos 2\sigma}{4}$$

oder $$\frac{4\,d^2 f^2}{e^2} = 2f^2\,(1 + \cos 2\sigma) + 2d^2\,(1 - \cos 2\sigma).$$

Bekanntlich ist $1 + \cos 2\sigma = 2 \cos \sigma^2$ und $1 - \cos 2\sigma = 2 \sin \sigma^2$, wonach die vorhergehende Gleichung übergeht in:

$$\frac{d^2 f^2}{e^2} = f^2 \cos \sigma^2 + d^2 \sin \sigma^2$$

oder $$d^2 f^2 - e^2 f^2 \cos \sigma^2 = d^2 e^2 \sin \sigma^2,$$

also $$f = \frac{d\, e \sin \sigma}{\sqrt{(d^2 - e^2 \cos \sigma^2)}}.$$

Ist hieraus f gefunden, so ist $$x = \frac{f + d}{2},\ y = \frac{f - d}{2}$$

und vermöge §. 103 die Grundlinie $z = \frac{df}{e}$.

Der für f erhaltene Ausdruck läßt sich in folgender Art aus der Figur bestätigen: Wenn wir uns aus B, Fig. 35, auf die verlängerte DF ein Lot BH gefällt denken und durch E mit FH eine Parallele ziehen, welche das Lot BH in K schneidet, so ist Winkel $BDH = ADF = \sigma$, folglich $BH = e \sin \sigma$, $EK = DH = e \cos \sigma$ und $BK = \sqrt{d^2 - EK^2} = \sqrt{d^2 - e^2 \cos \sigma^2}$. Da EK || FH ist, so verhält sich

$$BF : BH = BE : BK,$$

d. h. wenn wir die obigen Werthe einsetzen,

$$f : e \sin \sigma = d : \sqrt{d^2 - e^2 \cos \sigma^2},$$

folglich $$f = \frac{d\, e \sin \sigma}{\sqrt{(d^2 - e^2 \cos \sigma^2)}}.$$

Diese Gleichung spricht so wie die Gleichung (1) der synthetischen Auflösung die Bedingung aus, daß $d > e \cos \sigma$ sein muß, wenn die Aufgabe überhaupt zu lösen sein soll.

In ähnlicher Art wie die vorhergehende Aufgabe lassen sich die folgenden behandeln, wenn gegeben ist:

1) und 2) die Grundlinie, der Unterschied der Winkel an derselben und die Summe oder Differenz der Seiten;

3) der Unterschied der Segmente, der Winkel an der Spitze und die Summe der Seiten;

4) die Mittellinie, der Unterschied der Winkel, welche sie mit den Seiten bildet, und die Summe oder

5) die Differenz der Seiten.

§. 106. Aufgabe.

Ein Dreieck zu zeichnen und trigonometrisch aufzulösen, von welchem die Grundlinie = c, die Höhe = h und der Winkel an der Spitze = γ gegeben sind.

I. Geometr. Auflösung. Man ziehe eine Linie AB = c, Fig. 38, beschreibe über derselben einen Kreisbogen, welcher den Winkel γ faßt, errichte

auf der Linie AB in einem beliebigen Punkte, für das Folgende am bequemsten in der Mitte D, ein Lot DE = h, ziehe hierauf durch E mit AB eine Parallele, welche den Kreis in zwei Punkten C und G durchschneidet, und verbinde endlich einen derselben C mit A und B; dann ist ABC das verlangte Dreieck*).

Der Beweis folgt unmittelbar aus der Construction.

II. Trigonometr. Auflösung. A) Synthetisch. Wir haben in der geometrischen Auflösung zunächst über AB = c einen den Winkel γ fassenden Kreisbogen beschrieben, d. h. im wesentlichen nichts anders, als das rechtwinklige Dreieck AMD gezeichnet, welches entsteht, wenn wir den Mittelpunkt M mit einem Endpunkte A der Grundlinie verbinden. Aus diesem rechtwinkligen Dreiecke, in welchem Winkel AMD = γ und AD = $^1/_2$c ist, ergibt sich der Radius AM, welchen wir mit r bezeichnen,

$$r = \frac{^1/_2\, c}{\sin \gamma} = \frac{c}{2 \sin \gamma} \text{ und } MD = {^1/_2}\, c \,.\, \operatorname{cotg} \gamma.$$

Durch die geometrische Construction ist dann weiter das rechtwinklige Dreieck CEM entstanden. In demselben kennen wir die Hypotenuse CM = r und die Cathete ME = h — MD; wir berechnen hieraus

$$\cos CME = \frac{ME}{r}$$

oder, wenn wir die oben erhaltenen Werthe einsetzen,

$$\cos CME = \frac{(h - {^1/_2}\, c \,.\, \operatorname{cotg} \gamma) \,.\, 2 \sin \gamma}{c} = \frac{2\, h \sin \gamma}{c} - \cos \gamma,$$

indem bekanntlich cotg γ sin γ = cos γ ist. — Der Winkel CME ist in Graden ausgedrückt gleich dem Bogen CF = $^1/_2$ CG. Der Bogen CG aber ist = BC — AC oder, da der Bogen doppelt so viel Grade als der zugehörige Peripheriewinkel hat, = 2 A — 2 B, folglich Winkel CME = A — B = 2 ϑ. Setzen wir diesen Werth in die vorhergehende Gleichung ein, und ersetzen wir zugleich um größerer Symmetrie willen sin γ durch sin 2 σ und — cos γ durch + cos 2 σ, da γ und 2 σ sich zu 180^0 ergänzen, so verwandelt sich jene Gleichung in:

$$1)\quad \cos 2\,\vartheta = \cos 2\,\sigma + \frac{2\, h \sin 2\,\sigma}{c}.$$

Ist aus dieser Gleichung 2 ϑ gefunden, so ist

$$2)\quad A = \sigma + \vartheta \text{ und } B = \sigma - \vartheta.$$

Ziehen wir endlich noch das Lot CH = h, so ist in den rechtwinkligen Dreiecken AHC und BCH

$$3)\quad AC = \frac{h}{\sin A} \text{ und } 4)\quad BC = \frac{h}{\sin B}.$$

B) Analytisch. Bekanntlich ist

$$h = a \sin B \text{ und } a = \frac{c \sin A}{\sin C},$$

folglich

$$h = \frac{c \sin A \sin B}{\sin C}$$

und

$$2 \sin A \sin B = \frac{2\, h \sin C}{c}.$$

*) Wenn man G mit A und B verbindet, so erhält man ein mit ABC congruentes Dreieck ABG.

Nach §§. 27 und 29 ist

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

und $$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B,$$

folglich, wenn wir diese Gleichungen von einander subtrahiren,

$$2 \sin A \sin B = \cos(A - B) - \cos(A + B) = \cos 2\vartheta - \cos 2\sigma.$$

Setzen wir diesen Werth in die oben erhaltene Gleichung ein, und ersetzen wir zugleich sin C durch sin 2σ, so geht dieselbe über in

$$\cos 2\vartheta - \cos 2\sigma = \frac{2h \sin 2\sigma}{c},$$

also $$\cos 2\vartheta = \cos 2\sigma + \frac{2h \sin 2\sigma}{c}.$$

Ist aus dieser Gleichung, welche mit der in der synthetischen Auflösung erhaltenen übereinstimmt, 2ϑ gefunden, so werden die noch fehlenden Stücke des Dreiecks ABC ebenso wie dort berechnet.

Da jeder Cosinus $\overline{\overline{<}}\, 1$ sein muß, so folgt aus der vorstehenden Gleichung

$$\cos 2\sigma + \frac{2h \sin 2\sigma}{c} \overline{\overline{<}}\, 1$$

oder $$\frac{2h \sin 2\sigma}{c} \overline{\overline{<}}\, 1 - \cos 2\sigma$$

oder $$\frac{4h \sin\sigma \cos\sigma}{c} \overline{\overline{<}}\, 2 \sin\sigma^2,$$

also $$h \overline{\overline{<}}\, {}^1/_2\, c \operatorname{tang} \sigma.$$

Wenn wir uns AF und BF gezogen denken, so ist Winkel AFB = ACB = γ, folglich Winkel AFD = ${}^1/_2\,\gamma$ und FAD = σ, also ${}^1/_2$ c tang σ = AD tang FAD = DF. Die so eben erhaltene Bedingung läuft also darauf hinaus, daß die Höhe h des Dreiecks kleiner oder höchstens gleich der Höhe DF des Kreisabschnittes sein darf.

Man kann auch die Seiten BC und AC, welche wir mit x und y bezeichnen wollen, unmittelbar aus den gegebenen Stücken h, c und γ berechnen. Nach dem pythagoräischen Lehrsatze ist nämlich zunächst

$$1)\quad c^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos\gamma.$$

Eine zweite Gleichung erhalten wir, wenn wir den Inhalt des Dreiecks einmal durch ${}^1/_2$ hc und das anderemal durch ${}^1/_2$ xy sin γ ausdrücken; dann ergibt sich

$$2)\quad ch = xy \sin\gamma.$$

Wir überlassen jedoch die Auflösung dieser beiden Gleichungen dem Leser zur eigenen Uebung und bemerken nur, daß auch hier die Rechnung vereinfacht wird, wenn wir nicht sofort x und y selbst, sondern zunächst ihre halbe Summe und Differenz suchen.

Von den auf diesem Wege gefundenen Resultaten

$$f^2 = c^2 + 2c\, h \operatorname{tang} \sigma$$

und $$d^2 = c^2 - 2c\, h \operatorname{cotg} \sigma$$

eignet sich zur Ableitung aus der Figur besonders der zweite.

Verbinden wir zu dem Zwecke (Fig. 38) F mit B, so ist, wie oben gezeigt, Winkel DBF = σ, mithin, wenn wir durch E zu BF die Parallele EK ziehen, auch DKE = σ

und $$h \,.\, \operatorname{cotg} \sigma = DK.$$

Der für d gefundene Werth geht also in

$$1)\quad d^2 = c^2 - 2c \,.\, DK$$

über, woraus weiter $$\frac{d^2}{2} = \frac{c^2}{2} - c \,.\, DK = c\left(\frac{c}{2} - DK\right) = c \,.\, BK$$

oder die Proportion 2) $d : c = BK : \frac{d}{2}$

folgt. — Tragen wir nun noch AC auf CB von C aus gleich CO ab und verbinden A mit O, so ist $BO = d$ und W. $BAO = \vartheta$. Ebenso ist aber auch W. $BLK = CLE = CBF = \vartheta$, mithin ist Viereck AKLO ein Kreisviereck und in Folge dessen verhält sich 3) $BO : AB = BK : BL$

oder $d : c = BK : BL$

Die Proportion (2) ist also als richtig erwiesen, wenn $BL = \frac{d}{2}$ ist.

In dem Dreiecke CBG ist W. CBG durch BF halbirt; folglich verhält sich

$$CP : GP = CB : GB = CB : CA,$$

also auch

$$CP : CP - GP = CB : CB - CA$$

oder

$$CP : 2EP = CB : d$$

oder

$$4)\ CP : EP = CB : \frac{d}{2}.$$

Da $EL \parallel BP$ ist, so verhält sich ferner

$$5)\ CP : EP = CB : BL.$$

Aus den beiden Proportionen (5) und (6) folgt aber

$$BL = \frac{d}{2}.\ \text{w. z. b. w.}$$

§. 107. Aufgabe.

Ein Dreieck zu zeichnen und trigonometrisch aufzulösen, wenn von demselben die Grundlinie $= c$, die Höhe $= h$ und der Unterschied der Winkel an der Grundlinie $= 2\vartheta$ gegeben ist (Fig. 39).

I. Geometr. Auflösung. Wenn man mit der kleineren Seite AC um die Spitze C einen Kreis beschreibt, welcher die Grundlinie AB in D durchschneidet, ferner den Durchmesser DE zieht und A mit E verbindet, so ist, wie leicht zu sehen, $AE = 2h$, Winkel $BAE = 90^0$ und Winkel $ECB = 180^0 - BCD = 180^0 - 2\vartheta$. Hat man daher zunächst aus $AE = 2h$ und $AB = c$ das rechtwinklige Dreieck EAB gezeichnet, so läßt sich der Punkt C durch Benutzung eines zweifachen geometrischen Ortes bestimmen, woraus sich die folgende Construction ergibt: Man zeichne eine Linie $AB = c$, errichte auf derselben in dem Endpunkte ein Lot $AF = h$ und verlängere dasselbe um seine eigne Länge bis E, verbinde dann B mit E und beschreibe über BE einen Kreisbogen, welcher den Winkel $180^0 - 2\vartheta$ faßt. Wenn man nun noch durch F mit AB eine Parallele zieht, welche den Kreisbogen in C (und EB in G) durchschneidet und C mit A und B verbindet, so ist ABC das verlangte Dreieck, wie leicht aus der vorausgeschickten Analysis hervorgeht.

II. Trigonometr. Auflösung. A) Synthetisch. In dem zuerst gezeichneten rechtwinkligen Dreiecke BAE kennen wir beide Catheten $AB = c$ und $AE = 2h$; wir berechnen hieraus den Winkel AEB, welchen wir der Kürze wegen mit φ bezeichnen, durch die Gleichung

$$1)\ \text{tang}\ \varphi = \frac{c}{2h}.$$

Wir haben demnächst das Dreieck EMB construirt. Da zufolge dieser Construction Winkel $ECB = 180^0 - 2\vartheta$ ist, so ist, wenn wir uns den durch E

C und B beschriebenen Kreis vollendet denken, ein auf dem Bogen ECB stehender Peripheriewinkel $= 2\vartheta$, folglich der Centriwinkel EMB $= 4\vartheta$, und da, wie leicht zu sehn, EB in G halbirt ist, Winkel EMG $= 2\vartheta$. Daher ist in dem rechtwinkligen Dreiecke EGM

$$\cos 2\vartheta = \frac{MG}{ME} = \frac{MG}{MC}.$$

Wir kennen daher in dem Dreieck CMG das Verhältniß zweier Seiten MG : MC und den der einen gegenüberliegenden Winkel MGC, welcher $= 90^0 +$ CGE $= 90^0 + 90^0 - \varphi = 180^0 - \varphi$ ist. Wir finden daher nach dem Sinussatze

$$\sin MCG = \frac{MG}{MC} . \sin MGC = \cos 2\vartheta \sin \varphi.$$

Der Winkel MCG ist der Nebenwinkel von MCF; der Winkel MCF aber besteht aus zwei Theilen ECF und ECM; von diesen ist
ECF $=$ EDA $=$ A und
ECM $= 90^0 - \frac{1}{2}$EMC $= 90^0 -$ EBC*) $= 90^0 -$ EBA $+$ CBA $= \varphi +$ B;
demnach ist W. MCF $=$ ECF $+$ ECM $=$ A $+ \varphi +$ B $= 2\sigma + \varphi$. Da sin MCF $=$ sin MCG ist, so erhalten wir folglich die Gleichung

$$2)\ \sin (2\sigma + \varphi) = \cos 2\vartheta \sin \varphi.$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich, da φ vermöge Gleichung (1) bereits gefunden ist, der Winkel 2σ, und da ϑ gegeben ist, so erhalten wir weiter

$$3)\ A = \sigma + \vartheta \text{ und } B = \sigma - \vartheta.$$

Wir kennen nun im Dreiecke ABC die Seite c und alle Winkel und bekommen die noch fehlenden Seiten durch die Gleichungen:

$$4)\ BC = \frac{c \sin A}{\sin C} \text{ und } AC = \frac{c \sin B}{\sin C}.$$

B) Analytisch. Wir gehen auch hier, wie in der analytischen Auflösung der vorhergehenden Aufgabe, von der Gleichung

$$h = \frac{c \sin A \sin B}{\sin C}$$

aus, welche wir, so wie dort, in die Gleichung

$$2h \sin 2\sigma = c . \cos 2\vartheta - c . \cos 2\sigma$$

oder

$$2h \sin 2\sigma + c . \cos 2\sigma = c . \cos 2\vartheta$$

umformen. Da in dieser Gleichung sowohl der Sinus als auch der Cosinus des gesuchten Winkels 2σ, aber außerdem noch ein hiervon unabhängiges Glied vorkommt, so wenden wir zur Auflösung derselben das in §. 88 angegebene Verfahren an; wir dividiren nämlich zunächst die ganze Gleichung durch 2h, also

$$\sin 2\sigma + \frac{c}{2h} . \cos 2\sigma = \frac{c}{2h} \cos 2\vartheta,$$

und suchen hierauf einen Hilfswinkel φ durch die Gleichung

$$1)\ \tang \varphi = \frac{c}{2h}.$$

Führen wir diesen Ausdruck in die vorhergehende Gleichung ein, so verwandelt sich dieselbe in

$$\sin 2\sigma + \cos 2\sigma \tang \varphi = \cos 2\vartheta \tang \varphi$$

*) Der Peripheriewinkel ist die Hälfte des zugehörigen Centriwinkels.

oder, wenn wir beiderseits mit $\cos\varphi$ multipliciren,

$$\sin 2\sigma \cos\varphi + \cos 2\sigma \sin\varphi = \cos 2\vartheta \sin\varphi,$$

wofür wir auch setzen können:

$$2)\ \sin(2\sigma + \varphi) = \cos 2\vartheta \sin\varphi,$$

dieselbe Gleichung, welche wir bereits in der synthetischen Auflösung erhalten haben.

Zur unmittelbaren Berechnung der Seiten aus den gegebenen Stücken führen die Gleichungen

$$1)\ xy \sin 2\vartheta = zh$$
$$2)\ cz = (x + y)(x - y)$$
$$3)\ x^2 + y^2 - 2xy \cos 2\vartheta = z^2.$$

Auch hier gewinnen wir an Bequemlichkeit der Rechnung, wenn wir statt der Seiten x und y selbst zunächst deren Summe f und Differenz d berechnen. Die Ausführung dieser Rechnung überlassen wir dem Leser zur eigenen Uebung und bemerken nur noch, daß die nach Elimination von z und f gewonnene Gleichung

$$\frac{c^2 \sin\vartheta \cos\vartheta^2}{d^2 - c^2 \sin\vartheta^2} - \sin\vartheta = \frac{2h}{\sqrt{d^2 - c^2 \sin\vartheta^2}}$$

an Einfachheit gewinnt, wenn wir

$$d^2 - c^2 \sin\vartheta^2 = u^2, \text{ also } \sqrt{d^2 - c^2 \sin\vartheta^2} = u$$

setzen, darauf aus der Gleichung

$$u^2 + \frac{2hu}{\sin\vartheta} = c^2 \cos\vartheta^2$$

u bestimmen und hieraus d ableiten. — Auch für die Ableitung auf geometrischem Wege empfiehlt sich letztere Gleichung in höherem Grade, als die verwickelter und weitläufiger ausfallenden Endresultate. In Fig. 36 ist

$$BE = d,\ \text{W. } BAE = \vartheta,\ BH = c \cdot \sin\vartheta$$

und
$$EH = \sqrt{d^2 - c^2 \sin\vartheta^2} = u.$$

Die Gleichung
$$u^2 + \frac{2hu}{\sin\vartheta} = c^2 \cos\vartheta^2$$

geht also, da $c \cdot \cos\vartheta = AH$ ist, über in

$$EH^2 + \frac{2h \cdot EH}{\sin\vartheta} = AH^2$$

oder
$$AH^2 - EH^2 = \frac{2h \cdot EH}{\sin\vartheta}$$

oder
$$\frac{AH + EH}{2} \cdot (AH - EH) \sin\vartheta = h \cdot EH.$$

Fällen wir von C und E auf AB die Lote $CD = h$ und $EG = (AH - EH) \sin\vartheta$, halbiren ferner W. ACB durch CF, welche Linie auch AE in K halbirt, so ist, wie leicht zu sehen,

$$HK = \frac{AH + EH}{2}$$

und es muß noch die Richtigkeit der Gleichung

$$HK \cdot EG = CD \cdot EH$$

oder die der Proportion
$$CD : HK = EG : EH$$

bewiesen werden.

Aus der Aehnlichkeit der beiden Dreiecke CDF und AKF folgt

$$CD : CF = AK : AF.$$

Weiter verhält sich aber auch, da KF || BH ist,

$$AK : AF = HK : BF,$$

mithin auch $CD : CF = HK : BF$

oder $CD : HK = CF : BF.$

Die Proportion $CD : HK = EG : EH$ ist also richtig,

wenn $CF : BF = EG : EH$ erwiesen werden kann.

Das Viereck EGBH ist, da W. $G = 90^0$ und $H = 90^0$ ist, ein Kreisviereck; mithin ist, wenn wir noch GH ziehen, W. $EHG = EBG$ und W. $EGH = EBH = FCB$, folglich $\triangle$ EGH $\sim$ FCB, also verhält sich

$$CF : BF = EG : EH$$ w. z. b. w.

In ähnlicher Art wie die beiden vorhergehenden Aufgaben lassen sich auch die folgenden behandeln, wenn gegeben sind:

1) die Höhe, der Unterschied der Segmente der Grundlinie und der Unterschied der Winkel an derselben;

2) die Höhe, der Unterschied der Segmente der Grundlinie und der Winkel an der Spitze;

3) die beiden Segmente der Grundlinie und der Winkel an der Spitze;

4) die beiden Segmente der Grundlinie und der Unterschied der Winkel an derselben;

5) die Höhe, der Umfang und der Winkel an der Spitze;

6) die Höhe, der Umfang und der Unterschied der Winkel an der Grundlinie;

7) der Radius des in das Dreieck zu zeichnenden Kreises ρ, die Grundlinie und der Winkel an der Spitze;

8) ρ, die Grundlinie und der Unterschied der Winkel an derselben;

9) ρ, der Unterschied der beiden Seiten und der Winkel an der Spitze;

10) ρ, der Unterschied der beiden Seiten und der Unterschied der Winkel an der Grundlinie.

Bemerkung.

Wir haben für die meisten der im Vorhergehenden behandelten Aufgaben die Auflösung auf mehrfachen Wegen gewonnen, indem wir die fehlenden Winkel und Seiten auf synthetischem und analytischem Wege berechneten. Diese verschiedenen Wege bieten oft sehr ungleiche Schwierigkeiten dar. So viel steht jedoch fest, daß für alle Aufgaben, welche sich geometrisch lösen lassen, auch die trigonometrische Auflösung durch ein ganz analoges Verfahren gewonnen werden kann. Man hat nämlich in der That weiter nichts nöthig, als die in der geometrischen Auflösung verzeichneten Dreiecke in derselben Reihenfolge, in welcher dieselben construirt worden sind, trigonometrisch aufzulösen. Zur Bestätigung des eben Gesagten mag noch das folgende Beispiel und können weiterhin auch die über Vierecke (§. 109—113) aufgestellten Aufgaben dienen.

Da jede trigonometrische Function durch das Verhältniß zweier Linien dargestellt, also ein Winkel, von welchem eine trigonometrische Function bekannt ist, mit Leichtigkeit construirt werden kann, so läßt sich umgekehrt die Auflösung jeder Aufgabe, welche durch trigonometrische Rechnung lösbar ist, sofern hierbei nicht höhere als quadratische Gleichungen zur Anwendung kommen, auch auf dem Wege einer geometrischen Construction gewinnen. (S. auch Planimetrie §. 277 u. folg.)

§. 108. Aufgabe.

Ein Dreieck zu zeichnen und trigonometrisch aufzulösen, von welchem die Grundlinie $= c$, die Mittellinie $= t$ und der Winkel an der Spitze $= \gamma$ gegeben ist.

I. Geometr. Auflösung. Man zeichne über der gegebenen Grundlinie $AB = c$, Fig 40, einen Kreisbogen, welcher den Winkel γ faßt, und um den Halbirungspunkt D der Grundlinie mit t einen Kreis, welcher den so eben beschriebenen Bogen in zwei Punkten durchschneidet. Verbindet man dann einen dieser Durchschnittspunkte C mit A und B, so ist ABC das verlangte Dreieck.

II. Trigonometr. Auflösung. Wenn wir den Mittelpunkt M des über AB beschriebenen Kreisabschnitts mit A und D verbinden, so ist Winkel $AMD = \gamma$, folglich

$$AM = \frac{c}{2 \sin \gamma} \text{ und } MD = {}^1/_2 c \operatorname{cotg} \gamma.$$

Wir sind nun auch im Stande, das Dreieck CMD aufzulösen, da wir in demselben alle drei Seiten,

$$CD = t,\ MD = {}^1/_2 c \operatorname{cotg} \gamma,\ MC = AM = \frac{c}{2 \sin \gamma}$$

kennen. Wir berechnen hieraus nach §. 68 den Winkel CMD, dessen Nebenwinkel $CME = 2\vartheta$ ist, wie wir in §. 106 gesehen haben. — Ist aber 2ϑ gefunden, so kennen wir auch, da $2\sigma = 180^0 - \gamma$ bekannt ist, die Winkel $A = \sigma + \vartheta$ und $B = \sigma - \vartheta$ und vermögen nun leicht das Dreieck ABC selbst, dessen Grundlinie $AB = c$ gegeben ist, aufzulösen.

Wir übergehen hier die analytische Berechnung der gesuchten Winkel, da dieselbe zu weitläufig ausfallen würde. Dahingegen bietet die Berechnung der Seiten, welche wir mit x und y bezeichnen, keine große Schwierigkeit dar. Vermöge §. 62, Anm. können wir nämlich zunächst die Gleichung

$$1)\ x^2 + y^2 = 2t^2 + {}^1/_2 c^2$$

bilden und zu dieser nach dem pythagoräischen Lehrsatze die Gleichung

$$2)\ x^2 + y^2 - 2xy \cos \gamma = c^2$$

hinzufügen. — Die weitere Ausrechnung dieser Gleichungen überlassen wir jedoch dem Leser zur eigenen Uebung.

Weiter wollen wir noch einige Aufgaben über Dreiecke anführen, deren Auflösung sich leicht auf die im Vorhergehenden behandelten Aufgaben zurückführen läßt. — Es sei gegeben:

1) Die Grundlinie, der Winkel an der Spitze und die Summe der Quadrate der einschließenden Seiten.

Man sieht hier auf der Stelle, daß diese Aufgabe mit der zuletzt gelösten Aufgabe übereinstimmt.

2) Die Grundlinie, der Winkel an der Spitze und die Differenz der Quadrate der einschließenden Seiten.

Bezeichnen wir die fehlenden Seiten mit a und b, die Segmente der Grundlinie mit p und q, so ist bekanntlich

$$p - q = \frac{a^2 - b^2}{p + q}.$$

Da nun $p + q$ und $a^2 - b^2$ gegeben sind, so ist folglich auch $p - q$ bekannt; die obige Aufgabe ist also nicht verschieden von der Aufgabe, wenn der Winkel an der Spitze und die beiden Segmente der Grundlinie gegeben sind.

3) Die Grundlinie (c), der Winkel an der Spitze (γ) und das Rechteck der einschließenden Seiten (a . b).

Bezeichnen wir die Höhe mit h, so ist

$$ch = ab \sin \gamma,$$

indem beide Seiten dieser Gleichung den doppelten Inhalt des Dreiecks ausdrücken. Da nun c, γ und a . b gegeben sind, so ist auch h bekannt, und es fällt daher die obige Aufgabe zusammen mit der Aufgabe, wenn Grundlinie, Höhe und Winkel an der Spitze gegeben sind.

Endlich führen wir noch die folgenden Aufgaben an, denen wir die trigonometrische Lösung hinzufügen:

4) Die Seiten eines Dreiecks zu berechnen, wenn der Inhalt des Dreiecks = J und die Winkel desselben = α, β, γ gegeben sind.

Auflösung. Bezeichnen wir die den Winkeln α, β, γ gegenüberliegenden Seiten beziehlich mit x, y, z, so erhalten wir vermöge §. 71 die Gleichung

$$J = \frac{x^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha} \text{ und hieraus } x = \sqrt{\frac{2J \sin \alpha}{\sin \beta \sin \gamma}}.$$

Eben so ergibt sich $y = \sqrt{\frac{2J \sin \beta}{\sin \alpha \sin \gamma}}$ und $z = \sqrt{\frac{2J \sin \gamma}{\sin \alpha \sin \beta}}$.

5) Die Seiten eines Dreiecks zu berechnen, wenn der Inhalt des Dreiecks = J, der Winkel an der Spitze = γ und das Verhältniß der diesen Winkel einschließenden Seiten (x und y) = m : n gegeben ist.

Auflösung. Aus der Aufgabe und §. 69 ergeben sich die Gleichungen:

$$x : y = m : n \text{ und } {}^1\!/_2 xy \sin \gamma = J,$$

woraus $x = m \sqrt{\frac{2J}{mn \sin \gamma}}$ und $y = n \sqrt{\frac{2J}{mn \sin \gamma}}$

hervorgeht. — Zu den nämlichen Resultaten gelangt man auch, wenn man sich ein Dreieck gezeichnet denkt, welches m und n zu Seiten und γ zum Winkel an der Spitze hat. Bezeichnet man den Inhalt dieses Dreiecks mit J', so ist

$$J' = {}^1\!/_2 mn \sin \gamma.$$

Da aber dieses in Gedanken entworfene Dreieck dem gegebenen ähnlich ist, so verhält sich

$$J' : J = m^2 : x^2 = n^2 : y^2,$$ woraus sich ebenfalls

$$x = m\sqrt{\frac{J}{J'}} = m\sqrt{\frac{2J}{mn \sin \gamma}} \text{ und } y = n\sqrt{\frac{2J}{mn \sin \gamma}}$$

ergibt. Sind aber auf diese Art die Seiten x und y gefunden, so läßt sich die noch fehlende Grundlinie leicht nach §. 63 oder 66 erhalten.

6) Die Seiten eines Dreiecks zu berechnen, wenn das Verhältniß derselben = m : n : p und der Inhalt des Dreiecks = J gegeben ist.

Auflösung. Denken wir uns ein Dreieck gezeichnet, welches m, n und p zu Seiten hat, so ist dasselbe offenbar dem aufzulösenden Dreiecke ähnlich. Bezeichnen wir daher seinen Inhalt, welchen wir leicht nach §. 73 berechnen können, mit J', so erhalten wir die Proportion

$$J' : J = m^2 : x^2,$$

also

$$x = m\sqrt{\frac{J}{J'}}.$$

Eben so finden wir $y = n\sqrt{\frac{J}{J'}}$ und $z = p\sqrt{\frac{J}{J'}}$.

7) Von einem Dreiecke ist der Inhalt $= J$, der Winkel an der Spitze $= \gamma$ und die Summe der einschließenden Seiten $= f$ gegeben; es sollen hieraus diese Seiten (x, y) und die Grundlinie (z) berechnet werden.

Auflösung. Aus der Aufgabe ergeben sich die Gleichungen

$$x + y = f \text{ und } xy = \frac{2J}{\sin \gamma}.$$

Um des Zusammenhanges willen mit den folgenden Aufgaben verfahren wir bei der Auflösung dieser Gleichungen auf die Art, daß wir zunächst die Differenz der gesuchten Seiten $x - y$, welche wir $= d$ setzen, suchen. Dann verwandelt sich die zweite der oben angeführten Gleichungen in

$$\text{I. } f^2 - d^2 = \frac{8J}{\sin \gamma},$$

woraus sich

$$d = \sqrt{f^2 - \frac{8J}{\sin \gamma}}$$

ergibt. Nun ist aber die größere Seite $x = \frac{f + d}{2}$, die kleinere $y = \frac{f - d}{2}$. Zur Berechnung der Grundlinie z haben wir die Gleichung

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \gamma,$$

wofür wir auch setzen können:

$$\text{II. } z^2 = f^2 \sin {}^1/_2\gamma^2 + d^2 \cos {}^1/_2\gamma^2$$

oder, wenn wir den Werth von d^2 aus der Gleichung (I.) einsetzen,

$$\text{III. } z^2 = f^2 - 4J \cot {}^1/_2\gamma,$$

also

$$z = \sqrt{f^2 - 4J \cot {}^1/_2\gamma}.$$

8) Sind von einem Dreiecke der Inhalt $= J$, der Winkel an der Spitze $= \gamma$ und der Unterschied der Seiten $x - y = d$ gegeben, so erhält man zunächst aus der Gleichung (I.) der vorhergehenden Aufgabe die Summe dieser Seiten

$$f = \sqrt{d^2 + \frac{8J}{\sin \gamma}}.$$

Setzen wir diesen Werth in die Gleichung (II.) ein, so verwandelt sich dieselbe in

$$\text{IV. } z^2 = d^2 + 4J \tan {}^1/_2\gamma,$$

folglich

$$z = \sqrt{d^2 + 4J \tan {}^1/_2\gamma}.$$

9) Die drei Seiten (x, y, z) eines Dreiecks zu berechnen, wenn der Inhalt desselben $= J$, der Umfang $= 2p$ und der Winkel an der Spitze $= \gamma$ gegeben sind.

Auflösung. Wenn wir $x + y = f$ setzen, so erhalten wir zunächst aus Gleichung (III.) $(f + z)(f - z) = f^2 - z^2 = 4J \cot {}^1/_2\gamma$ oder, da $f + z = 2p$ gegeben ist,

$$p(p - z) = J \cot {}^1/_2\gamma,$$

folglich

$$z = \frac{p^2 - J \cot {}^1/_2\gamma}{p}.$$

und

$$f = 2p - z = \frac{p^2 + J \cot {}^1/_2\gamma}{p}.$$

Sind aber f und z gefunden, so läßt sich d leicht aus Gleichung (I.) oder (II.) oder (IV.) berechnen; dann ist

$$x = \frac{f + d}{2} \text{ und } y = \frac{f - d}{2}.$$

C. Vierecksaufgaben.

§. 109. Aufgabe.

Ein Viereck zu zeichnen und trigonometrisch aufzulösen, von welchem drei Seiten AB = a, BC = b, CD = c, Fig. 41, und zwei einander gegenüberliegende Winkel ABC = β und ADC = δ gegeben sind.

I. Geometr. Auflösung. Man zeichne einen Winkel ABC = β, Fig. 42, mache AB = a, BC = b und ziehe AC; hierauf beschreibe man über AC einen Kreisbogen, welcher den Winkel δ faßt, und um C mit c einen Kreis, welcher den so eben beschriebenen Bogen in D durchschneidet. Verbindet man dann noch den Durchschnittspunkt D mit A und C, so ist ABCD das verlangte Viereck.

II. Trigonometr. Auflösung. In dem zuerst gezeichneten Dreiecke ABC kennen wir zwei Seiten AB = a, BC = b und den eingeschlossenen Winkel ABC = β. Bezeichnen wir die halbe Summe der fehlenden Winkel ACB und CAB mit σ und ihre halbe Differenz mit ϑ, so ist $\sigma = 90^0 - {}^1/_2\beta$, und wir erhalten ϑ nach dem Tangentensatze durch die Gleichung

$$1)\quad \text{tang}\,\vartheta = \frac{(a-b)\,\text{tang}\,\sigma}{a+b}.$$

Dann ist Winkel ACB = $\sigma + \vartheta$, CAB = $\sigma - \vartheta$, und die Seite AC ergibt sich nach dem Sinussatze durch die Gleichung

$$2)\quad AC = \frac{a\,.\,\sin ABC}{\sin ACB}.$$

In dem Dreiecke ADC kennen wir jetzt zwei Seiten AC, CD = c und den der einen gegenüberliegenden Winkel ADC = δ; wir erhalten den der andern Seite gegenüberliegenden Winkel durch die Gleichung

$$3)\quad \sin DAC = \frac{c\,.\,\sin\delta}{AC}.$$

Dann ist $\quad 4)$ Winkel $DCA = 180^0 - (\delta + DAC)$

und Seite $\quad 5)\quad AD = \dfrac{c\,.\,\sin ACD}{\sin DAC}.$

Endlich ist $\quad 6)$ Winkel BAD = BAC + CAD

und Winkel BCD = ACB + ACD.

Wenn der um C beschriebene Kreis den Bogen des über AC beschriebenen Abschnitts in zwei Punkten D und D′ durchschneidet, Fig. 42, so existirt noch ein zweites von ABCD verschiedenes Viereck ABCD′, welches ebenfalls sämmtliche gegebenen Stücke enthält. — Da die Sehne CD = CD′ gemacht ist, so ist auch der Bogen CED = CAD′; es ergänzen sich daher die Bogen CED und CED′ zu 360^0 und folglich die Peripheriewinkel CAD und CAD′ zu 180^0. Hiermit übereinstimmend liefert auch die Gleichung (3) der trigonometrischen Auflösung zwei sich zu einem Flachen ergänzende Werthe für den Winkel CAD.

§. 110. Aufgabe.

Ein Viereck zu zeichnen und trigonometrisch aufzulösen, von welchem drei Winkel DAB = α, ABC = β, BCD = γ und zwei einander gegenüberliegende Seiten AB = a und CD = c, Fig. 41, gegeben sind.

I. Geometr. Auflösung. Man zeichne eine Linie AB = a, Fig. 43, lege an dieselbe in dem Endpunkte A den Winkel HAB = α und in B den Winkel GBA = β an; ferner lege man an die Linie BG in einem beliebigen Punkte E

den Winkel γ = FEB an und mache EF = c. Zieht man dann noch durch F mit BG eine Parallele und durch den Punkt D, in welchem dieselbe AH schneidet, die Linie CD parallel EF, so enthält das Viereck ABCD, wie leicht zu sehen, sämmtliche gegebenen Stücke.

II. Trigonometr. Auflösung. Wenn wir die Linien AH und BG bis zu ihrem Durchschnitte in K verlängern, so kennen wir in dem entstandenen Dreiecke ABK die Seite AB = a und die ihr anliegenden Winkel BAK = $180^0 - \alpha$, ABK = $180^0 - \beta$ und folglich auch den dritten Winkel K. Wir berechnen hieraus

$$1)\ AK = \frac{a \sin \beta}{\sin K} \text{ und } BK = \frac{a \sin \alpha}{\sin K}.$$

Ebenso kennen wir in dem Dreiecke CDK eine Seite CD = c, Winkel K, Winkel C = γ und also auch den dritten Winkel CDK. Wir finden hieraus

$$2)\ DK = \frac{c \sin \gamma}{\sin K} \text{ und } CK = \frac{c \sin D}{\sin K}.$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) ergibt sich

$$3)\ AD = DK - AK \text{ und } BC = CK - BK.$$

Die Auflösung erleidet eine sich sehr leicht ergebende Abänderung, wenn die Linien AH und BG sich unmittelbar, nicht in ihren rückwärts fortgesetzten Verlängerungen durchschneiden. Wenn aber AH und BG parallel sein, also die Winkel α und β sich zu einem Flachen ergänzen sollten, so wird die Aufgabe, wenn zugleich a = c ist, unbestimmt, wenn aber a von c verschieden sein sollte, unmöglich.

§. 111. Aufgabe.

Ein Viereck zu zeichnen und trigonometrisch aufzulösen, von welchem zwei zusammenstoßende Seiten AB = a und AD = d, Fig. 41, der eingeschlossene Winkel DAB = α, der gegenüberliegende Winkel DCB = γ und die Diagonale, welche die Spitzen dieser Winkel verbindet, AC = g gegeben sind.

I. Geometr. Auflösung. Man zeichne zuerst das Dreieck ABD, Fig. 44, aus den beiden Seiten AB = a, AD = d und dem eingeschlossenen Winkel DAB = α, beschreibe dann über BD einen den Winkel γ fassenden Kreisbogen und um A mit g einen Kreis; endlich verbinde man den einen Durchschnittspunkt C dieser Kreise mit B und D, so ist ABCD das verlangte Viereck.

II. Trigonometr. Auflösung. Aus dem Dreiecke ABD, in welchem wir zwei Seiten AB = a, AD = d und den eingeschlossenen Winkel DAB = α, also auch die Summe der fehlenden Winkel ABD und ADB, welche wir mit 2σ bezeichnen, kennen, berechnen wir die Differenz dieser Winkel 2ϑ durch die bekannte Gleichung

$$\tan \vartheta = \frac{(a - d) \tan \sigma}{a + d}.$$

Dann ist Winkel ADB = $\sigma + \vartheta$, ABD = $\sigma - \vartheta$

und
$$BD = \frac{a \sin \alpha}{\sin ADB}.$$

Verbinden wir den Mittelpunkt M des über BD beschriebenen Kreisabschnitts mit B und D, so ist in dem entstandenen gleichschenkligen Dreiecke BMD Winkel BMD = 2BCD = 2γ, folglich Winkel MBD = $90^0 - \gamma$ und, wenn wir den Radius MD mit r bezeichnen,

$$r = \frac{BD}{2 \sin \gamma}.$$

Ziehen wir nun noch AM, so kennen wir in dem Dreiecke ABM wieder zwei Seiten AB=a, MB=r und den eingeschlossenen Winkel ABM=ABD+MBD; wir berechnen hieraus durch das vorhin angegebene Verfahren die Winkel BAM und BMA und die Seite AM; dann ist auch Winkel DMA=DMB−AMB bekannt. — Ziehen wir endlich noch AC und MC, so kennen wir in dem Dreiecke AMC alle drei Seiten AM, AC=g und MC=r; setzen wir die halbe Summe derselben = p, so erhalten wir den Winkel AMC durch die Gleichung

$$\text{cotg } {}^1/_2 AMC = \sqrt{\frac{p\,(p-AC)}{(p-AM)\,(p-CM)}}.$$

Nun ist auch Winkel BMC = 360° — (AMC + AMB) und Winkel DMC = AMC — AMD bekannt. Wir erhalten daher aus den gleichschenkligen Dreiecken BMC und DMC die noch fehlenden Seiten

$$BC = 2r \sin {}^1/_2 BMC \text{ und } CD = 2r \sin {}^1/_2 DMC.$$

Endlich ist Winkel ABC = ABM + MBC und Winkel ADC = 360° — (α + ABC + γ).

Zur bequemen Uebersicht der etwas weitläufigen Entwickelung wollen wir hier noch die Dreiecke in der Folge, in welcher dieselben aufgelöst worden sind, hinstellen:

1) △ BAD 2) △ DMB 3) △ ABM 4) △ AMC 5) △ BMC 6) △ DMC.

Wenn man den zweiten Durchschnittspunkt C′ der um A und M beschriebenen Kreisbogen mit B und D verbindet, so enthält das Viereck ABC′D ebenfalls alle gegebenen Stücke.

§. 112. Aufgabe.

Ein Viereck, um welches sich ein Kreis beschreiben läßt, zu zeichnen und trigonometrisch aufzulösen, wenn von demselben zwei zusammenstoßende Seiten AB = a und BC = b, Fig. 45, und zwei an einer Seite liegende Winkel gegeben sind.

I. Geometr. Auflösung. Da in einem Vierecke, um welches ein Kreis beschrieben werden kann, je zwei gegenüberstehende Winkel einen Flachen ausmachen und zwei an einer Seite liegende Winkel gegeben sein sollen, so sind offenbar sämmtliche Winkel des Vierecks, welche wir der Kürze wegen mit α, β, γ und δ bezeichnen wollen, bekannt. Wir ziehen nun zuerst eine Linie AB = a, Fig. 45, legen in den Endpunkten A und B die Winkel α und β an und machen den freien Schenkel BC des Winkels β gleich b. Hierauf beschreiben wir um das Dreieck ABC einen Kreis, welcher den freien Schenkel des Winkels α in D durchschneidet, und verbinden endlich C mit D; so ist ABCD das verlangte Viereck.

II. Trigonometr. Auflösung. Wir berechnen zuerst in dem Dreieck ABC, in welchem wir zwei Seiten AB = a, BC = b und Winkel ABC = β kennen, auf bekannte Weise die beiden fehlenden Winkel CAB und ACB. Verbinden wir dann den Mittelpunkt M des um das Viereck ABCD gezeichneten Kreises mit sämmtlichen Ecken desselben, so ist Centriwinkel AMB = 2ACB, Centriwinkel BMC = 2BAC, Centriwinkel DMC = 2DAC = 2(α — CAB) und

Centriwinkel AMD = 2ACD = 2(γ — ACB). Bezeichnen wir nun noch der Kürze wegen den Radius des um das Viereck ABCD beschriebenen Kreises mit r, so ist in dem gleichschenkligen Dreiecke AMB

$$r = \frac{AB}{2 \sin {}^1/_2 AMB} = \frac{a}{2 \sin ACB}$$

und in den gleichschenkligen Dreiecken CMD und AMD

$$CD = 2r \sin CAD \text{ und } AD = 2r \sin ACD,$$

also, wenn wir den Werth von r einsetzen,

$$CD = \frac{a \sin CAD}{\sin ACB} \text{ und } AD = \frac{a \sin ACD}{\sin ACB}.$$

Wenn wir uns BD gezogen denken, so ist Winkel ACD = ABD und Winkel ACB = ADB; hiernach geht der für AD erhaltene Ausdruck über in

$$AD = \frac{a \sin ABD}{\sin ADB},$$

eine Gleichung, deren Richtigkeit sich auch unmittelbar aus der bloßen Betrachtung des Dreiecks ABD ergibt.

§. 113. Aufgabe.

Ein Viereck um einen Kreis zu zeichnen, dessen Radius = ρ gegeben ist, und dasselbe trigonometrisch aufzulösen, wenn außerdem noch zwei an einer Seite liegende Winkel DAB = α und ABC = β, Fig. 46, und eine dem einen anliegende Seite BC = b gegeben sind.

I. Geometr. Auflösung. Man zeichne in dem gegebenen Kreise die Centriwinkel FME = $180^0 - \alpha$ und GME = $180^0 - \beta$, ziehe durch F, E und G Tangenten, mache die durch G gehende Tangente BC = b und ziehe endlich durch C eine Tangente, welche die durch F gehende Tangente in D durchschneidet; dann ist ABCD das verlangte Viereck.

II. Trigonometr. Auflösung. Wenn wir den Mittelpunkt M mit sämmtlichen Ecken des Vierecks ABCD verbinden, so sind zunächst in dem Dreiecke ABM die Winkel an der Grundlinie MAB = $^1/_2\alpha$, MBA = $^1/_2\beta$ und die Höhe ME = ρ bekannt. In dem rechtwinkligen Dreiecke AME ist

$$AM = \frac{\rho}{\sin {}^1/_2\alpha};$$

und in dem Dreiecke AMB ist

$$AB = \frac{AM \sin AMB}{\sin {}^1/_2\beta} = \frac{AM \sin {}^1/_2(\alpha + \beta)}{\sin {}^1/_2\beta}$$

oder, wenn wir den Werth von AM einsetzen,

$$1)\ AB = \frac{\rho \sin {}^1/_2(\alpha+\beta)}{\sin {}^1/_2\alpha \sin {}^1/_2\beta}.$$

Ferner ist in dem rechtwinkligen Dreiecke BGM

$$GB = \rho \operatorname{cotg} {}^1/_2\beta,$$

folglich $CG = BC - BG = b - \rho \operatorname{cotg} {}^1/_2\beta,$

und in dem rechtwinkligen Dreiecke MGC, wenn wir der Kürze wegen Winkel DCB = γ setzen,

$$2)\ \operatorname{tang} {}^1/_2\gamma = \frac{\rho}{CG} = \frac{\rho}{b - \rho \operatorname{cotg} {}^1/_2\beta}.$$

Da wir jetzt in dem Vierecke ABCD drei Winkel kennen, so ist auch der vierte Winkel ADC, welchen wir mit δ bezeichnen wollen, bekannt. Wir finden nun durch ein ganz ähnliches Verfahren wie dasjenige, welches wir bei dem Dreiecke AMB angewendet haben, aus den Dreiecken CMD und AMD

$$3)\quad CD = \frac{\rho \sin {}^1\!/_2(\gamma + \delta)}{\sin {}^1\!/_2\gamma \sin {}^1\!/_2\delta}$$

und

$$4)\quad AD = \frac{\rho \sin {}^1\!/_2(\alpha + \delta)}{\sin {}^1\!/_2\alpha \sin {}^1\!/_2\delta}.$$

In ähnlicher Art wie die vorhergehenden Aufgaben lassen sich die den Abschnitten 5, 6 und 8 der Planimetrie beigefügten Uebungsaufgaben über Vierecke behandeln. Außerdem enthält auch noch der folgende Abschnitt ein paar vollständig durchgeführte Beispiele.

Vierter Abschnitt.

Anwendungen der Trigonometrie auf die Feldmeßkunst.

§. 114. Aufgabe.

Die Entfernung zweier Punkte auf dem Felde A und B, Fig. 47, zu finden, wenn wegen eines zwischen denselben befindlichen Hindernisses die directe Messung nicht ausführbar ist.

Auflösung. Man nehme auf dem Felde einen dritten Punkt C an, messe die Linien AC und BC und den Winkel ACB; dann kennt man in dem Dreiecke ABC zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel und kann nun die dritte Seite AB nach §§. 62 oder 66 berechnen.

Wir fügen dieser Aufgabe kein Beispiel in bestimmten Zahlen bei, da das Verfahren schon bei den oben angeführten Paragraphen durch Beispiele erläutert worden ist. Aehnliches gilt von mehreren der folgenden Aufgaben.

§. 115. Aufgabe.

Die Entfernung zweier Punkte A und B, Fig. 47, auf dem Felde zu finden, wenn nur einer derselben A zugänglich, der andere B unzugänglich ist.

Auflösung. Man nehme wieder auf dem Felde einen dritten Punkt C an, messe die Linie AC und die Winkel BAC und BCA; dann kennt man in dem Dreiecke ABC eine Seite AC und zwei Winkel A und C, folglich auch den dritten Winkel $ABC = 180^0 - (A + C)$; man erhält daher die Seite AB durch die Gleichung

$$AB = \frac{AC \sin C}{\sin B}.$$

§. 116. Aufgabe.

Die Größe einer Linie AB, Fig. 48, auf dem Felde zu finden, wenn beide Endpunkte derselben A und B unzugänglich sind.

Auflösung. Man messe auf dem Felde (in der nämlichen Ebene mit AB) eine willkürliche Standlinie CD, in C die Winkel ACD und BCD

und in D die Winkel ADC und BDC; dann läßt sich aus diesen gemessenen Stücken die gesuchte Linie AB in folgender Art berechnen: Aus dem Dreiecke ACD, in welchem man eine Seite CD und zwei Winkel ACD und ADC, also auch den dritten Winkel CAD kennt, ergibt sich

$$1) \quad AC = \frac{CD \,.\, \sin ADC}{\sin CAD}.$$

Eben so kennt man in dem Dreiecke BCD die Seite CD und die beiden Winkel BCD und BDC, also auch den dritten Winkel CBD; man findet hieraus

$$2) \quad BC = \frac{CD \,.\, \sin BDC}{\sin CBD}.$$

Jetzt sind in dem Dreiecke ABC zwei Seiten AC und BC und der eingeschlossene Winkel ACB = ACD — BCD bekannt; es ergibt sich daher die dritte Seite durch die Gleichung

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2AC \,.\, BC \cos ACB},$$

welcher man auch, um bequemer mit Logarithmen zu rechnen, die folgende Form

$$3) \quad AB = AC \sqrt{1 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 - 2 \,.\, \frac{BC}{AC} \,.\, \cos ACB}$$

geben kann.

Man sieht auf der Stelle, daß sich die angegebene Auflösung auch dahin abändern läßt, daß man erst aus den Dreiecken ACD und BCD die Seiten AD und BD, und dann hieraus und aus dem Winkel ADB die Seite AB berechnet, was jedoch von dem vorhin ausgeführten Verfahren nicht wesentlich verschieden ist.

Endlich wollen wir noch bemerken, daß der Gang der obigen Auflösung in der Hauptsache auch dann noch der nämliche bleibt, wenn die Punkte A und B, deren Entfernung gesucht wird, nicht an derselben Seite, sondern an entgegengesetzten Seiten der Standlinie CD liegen sollten.

Es sei gegeben $CD = 2749$

$ACD = 117^0\,28'$ $\qquad BDC = 109^0\,43'$

$BCD = 32^0\,17'$ $\qquad ADC = 41^0\,12'$

dann ist $ACB = 85^0\,11'$, $CAD = 21^0\,20'$, $CBD = 38^0\,0'$.

Wir suchen zunächst nach Gleichung (1) und (2) log AC und log BC, (nicht AC und BC selbst).

log CD	= 3,43917	log CD	= 3,43917
+ log sin ADC	= 9,81868 — 10	+ log sin BDC	= 9,97376 — 10
	13,25785 — 10		13,41293 — 10
— log sin CAD	= 9,56085 — 10	— log sin CBD	= 9,78934 — 10
log AC	= 3,69700	log BC	= 3,62359

Vor der Berechnung von AB nach Gleichung (3) haben wir noch das Glied $\left(\frac{BC}{AC}\right)^2$, welches wir mit u^2 und das Glied $2 \,.\, \left(\frac{BC}{AC}\right) \,.\, \cos ACB$, welches wir mit w bezeichnen, zu suchen. Wir finden diese Ausdrücke durch die folgende Rechnung:

log BC	= 4,62359 — 1	log 2	= 0,30103
— log AC	= 3,69700	log u	= 0,92659 — 1
log u	= 0,92659 — 1	log cos ACB	= 8,92411 — 10
log u^2	= 0,85318 — 1 (2)	log w	= 0,15173 — 1
u^2	= 0,71315	w	= 0,14182

Demnach ist $1 + u^2 - w = 1 + 0{,}71315 - 0{,}14182 = 1{,}57133$.

Bezeichnen wir dieses Resultat mit z, so ist

$$AB = AC\sqrt{z}$$

und die weitere Rechnung folgende:

$$\begin{aligned} \log z \quad &= 2)\underline{\;0{,}19627\;} \\ &\quad\;\; 0{,}09813 \\ + \log AC &= \quad 3{,}69700 \\ \log AB &= \quad 3{,}79513 \\ AD &= \quad 6239{,}3. \end{aligned}$$

§. 117. Aufgabe.

Die Entfernung des Mondes von der Erde zu finden.

Auflösung. Es seien A und B, Fig. 50, zwei unter dem nämlichen Meridiane in möglichst weiter Entfernung von einander liegende Orte der Erdoberfläche, C und D die Mittelpunkte der Erde und des Mondes. Da beide Orte A und B unter demselben Meridiane liegen, so geht der Mittelpunkt des Mondes in dem nämlichen Augenblick durch den gemeinschaftlichen Meridian derselben, so daß dann die vier Punkte A, C, B und D in der nämlichen Ebene liegen. In diesem Momente werden von zwei in A und B befindlichen Beobachtern die Zenithdistanzen α und β gemessen. Da nun überdies in dem Vierecke ACDB die Seiten AC und BC gleich dem Radius der Erde sind, welchen wir mit r bezeichnen wollen, und der Winkel ACB, welchen wir gleich γ setzen, wenn die Orte A und B zu beiden Seiten des Aequators liegen, gleich der Summe ihrer Abstände vom Aequator, d. h. ihrer geographischen Breiten ist, so kennt man in dem Vierecke ACDB fünf Stücke, Winkel α, β und γ und zwei zusammenstoßende Seiten AC und BC, woraus sich die gesuchte Diagonale CD in folgender Art berechnen läßt:

Man suche zunächst die Winkel ADC = x und BDC = y. Die Summe dieser Winkel ist, wie leicht zu sehen, $= \alpha + \beta - \gamma$, also ihre halbe Summe,

$$1)\quad \sigma = \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2}.$$

Da hiernach die Summe der Winkel x und y bekannt ist, so handelt es sich nur noch darum, ihre Differenz zu finden, welche wir mit 2ϑ bezeichnen. Zu diesem Zwecke suchen wir eine Gleichung zwischen den gegebenen und den gesuchten Stücken zu bilden. Wir erhalten eine solche, indem wir die den Dreiecken ACD und BCD gemeinschaftliche Seite CD aus beiden ausdrücken. In dem Dreiecke ACD ist

$$CD = \frac{r \sin \alpha}{\sin x}$$

und in dem Dreiecke BCD ist $CD = \dfrac{r \sin \beta}{\sin y}$.

Setzen wir diese Werthe einander gleich, so erhalten wir die Gleichung:

$$\frac{r \sin \alpha}{\sin x} = \frac{r \sin \beta}{\sin y},$$

also

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Nach einem bekannten Satze der Proportionen folgt hieraus

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\sin \alpha + \sin \beta},$$

wofür wir nach §. 33 auch setzen können

$$\frac{2 \cos {}^1\!/_2(x+y) \sin {}^1\!/_2(x-y)}{2 \sin {}^1\!/_2(x+y) \cos {}^1\!/_2(x-y)} = \frac{2 \cos {}^1\!/_2(\alpha+\beta) \sin {}^1\!/_2(\alpha-\beta)}{2 \sin {}^1\!/_2(\alpha+\beta) \cos {}^1\!/_2(\alpha-\beta)}$$

oder $\operatorname{cotg} {}^1\!/_2(x+y) \operatorname{tang} {}^1\!/_2(x-y) = \operatorname{cotg} {}^1\!/_2(\alpha+\beta) \operatorname{tang} {}^1\!/_2(\alpha-\beta)$; da die Cotangente die Reciproke der Tangente ist, so läßt sich diese Gleichung mit Benutzung der oben angegebenen abkürzenden Bezeichnung umformen in

$$\frac{\operatorname{tang} \vartheta}{\operatorname{tang} \sigma} = \frac{\operatorname{tang} {}^1\!/_2(\alpha-\beta)}{\operatorname{tang} {}^1\!/_2(\alpha+\beta)}.$$

Da die Winkel σ und ϑ wegen der beträchtlichen Entfernung des Mondes von der Erde nur klein sind und zufolge §. 16 das Verhältniß der Tangenten kleiner Winkel von dem der Winkel selbst nur um ein Geringes verschieden ist — die dem Buche angehängte Tabelle zeigt, daß diese Regel noch bis zu Winkeln von 5^0 zutrifft — so werden wir ohne erheblichen Fehler die vorstehende Gleichung vereinfachen*) können in

$$\frac{\vartheta}{\sigma} = \frac{\operatorname{tang} {}^1\!/_2(\alpha-\beta)}{\operatorname{tang} {}^1\!/_2(\alpha+\beta)},$$

also 2) $$\vartheta = \frac{\sigma \,.\, \operatorname{tang} {}^1\!/_2(\alpha-\beta)}{\operatorname{tang} {}^1\!/_2(\alpha+\beta)}.$$

Haben wir aber aus dieser Gleichung ϑ gefunden, so ist

3) $x = \sigma + \vartheta$ und $y = \sigma - \vartheta$

bekannt; wir erhalten nun die gesuchte Entfernung durch die Gleichung

4) $$CD = \frac{r \sin \alpha}{\sin(\sigma + \vartheta)} \text{ oder } = \frac{r \sin \beta}{\sin(\sigma - \vartheta)}.$$

Um die Entfernung des Mondes von der Erde zu finden, wurden in den Jahren 1751 und 1752 von den beiden Astronomen Lalande in Berlin und Lacaille am Cap der guten Hoffnung correspondirende Beobachtungen angestellt. Die südliche Breite der Beobachtungsstation (A) am Cap und die nördliche Breite der Beobachtungsstation (B) in Berlin waren

$$A = 33^0\ 56'\ \ 3''$$
$$B = 52^0\ 30'\ 16''$$

folglich $\gamma = 86^0\ 26'\ 19''$

Die beiden Astronomen erhielten unter andern aus ihren am 6. December 1751 angestellten Beobachtungen

$$\alpha = 46^0\ 47'\ 16''$$
$$\beta = 41^0\ \ 0'\ 17''$$

folglich $\alpha + \beta = 87^0\ 47'\ 33''$

und $\alpha - \beta = \ \ 5^0\ 46'\ 59''$,

also, wenn wir halbe Secunden vernachlässigen,

$${}^1\!/_2\,(\alpha + \beta) = 43^0\ 53'\ 46''$$
$${}^1\!/_2\,(\alpha - \beta) = \ \ 2^0\ 53'\ 29''$$

*) Diese Vereinfachung ist für uns um so erwünschter, da unsere Logarithmentafel nur bis zu den Minuten hinabgeht, aber keine Sekunden enthält und das bei größern Winkeln anzuwendende Interpolationsverfahren bei kleinen Winkeln nicht zulässig ist, indem bei diesen das Verhältniß der Zuwachse der Logarithmen der Tangenten von dem Verhältnisse der Zuwachse der Winkel sehr verschieden ist.

endlich $2\sigma = \alpha + \beta - \gamma = 1^0 21' 14''$,

folglich $\sigma = 40' 37'' = 2437''$.

Wir finden nun zunächst ϑ durch folgende Rechnung:

$$\begin{aligned} \log \sigma &= 3{,}38686 \\ + \log \operatorname{tang} {}^1/_2 (\alpha - \beta) &= \underline{8{,}70335 - 10} \\ & \quad 12{,}09021 - 10 \\ - \log \operatorname{tang} {}^1/_2 (\alpha + \beta) &= \underline{9{,}98326 - 10} \\ \log \vartheta &= 2{,}10695 \\ \vartheta &= 128'' = 2' 8''. \end{aligned}$$

(Da unsere Tafel keine Secunden enthält, so haben wir bei der Bestimmung von log tang $2^0 53' 29''$ das folgende Interpolationsverfahren angewendet: Wie wir aus der Tafel ersehen, nehmen die Logarithmen der Tangenten in der Gegend von $2^0 53'$ mit dem Winkel ziemlich gleichmäßig zu und zwar von $2^0 53'$ bis zu $2^0 54'$ um 251 in den drei letzten Decimalstellen. Wir bilden demgemäß folgendes Regeldetri-Exempel: Bei einem Zuwachs von 60 Secunden nimmt log tang $2^0 53'$ um 251 zu, um wie viel wird dieser Logarithmus wachsen, wenn der Winkel um 29 Secunden vergrößert wird? — Antwort: um $\frac{251 \,.\, 29}{60} = 121$.

Demnach ist

$$\begin{aligned} \log \operatorname{tang} 2^0 53' 29'' &= 8{,}70214 \\ & \quad \underline{+ 121} \\ & \quad 8{,}70335. \end{aligned}$$

In ganz ähnlicher Art ist log tang $43^0 53' 46''$ erhalten worden.)

Nachdem wir ϑ gefunden haben, ergibt sich uns

$$x = \sigma + \vartheta = 42' 45'' \text{ und } y = \sigma - \vartheta = 38' 29''.$$

Wir erhalten nun den gesuchten Abstand des Mondes von der Erde nach Gleichung (4), indem wir den Radius der Erde zu 859,5 Meilen annehmen, durch folgende Rechnung:

$$\begin{aligned} \log r &= 2{,}93425 \\ + \log \sin \alpha &= \underline{9{,}86262 - 10} \\ & \quad 12{,}79687 - 10 \\ - \log \sin x &= \underline{8{,}09465 - 10} \\ \log CD &= 4{,}70222 \\ CD &= 50380. \end{aligned}$$

(Bei der Bestimmung von log sin α haben wir das vorhin angegebene Interpolationsverfahren angewendet; dieses erscheint jedoch bei log sin x als unzulässig, da die Logarithmen der Sinus sehr kleiner Winkel, wie die Tafel ausweist, bei gleichen Zuwachsen der Winkel nichts weniger als gleichmäßig zunehmen. Wie wir dagegen in §. 16 gesehen haben, wachsen die Sinus selbst sehr nahe in gleichem Verhältnisse mit den Winkeln; wir können daher, indem wir $42' 45'' = 2565''$ und $42' = 2520''$ setzen, folgende Proportion aufstellen: $\sin 42' 45'' : \sin 42' = 2565 : 2520$,

also

$$\sin 42' 45' = \frac{\sin 42' \,.\, 2565}{2520}$$

und $\log \sin 42' 45'' = \log \sin 42' + \log 2565 - \log 2520$. Wir erhalten hiernach

$$\begin{aligned} \log \sin 42' &= 8{,}08696 \\ + \log 2565 &= \underline{3{,}40909} \\ & \quad 11{,}49605 \\ - \log 2520 &= \underline{3{,}40140} \\ \log \sin 42' 45'' &= 8{,}09465. \end{aligned}$$

Die Rechnung für diese Aufgabe ist zwar etwas weitläufig geworden, aber nicht ohne nützliche Belehrung geblieben).

Die mittlere Entfernung des Mondes von der Erde beträgt 51800 Meilen; die Abweichung unseres Resultates hiervon hat nichts Befremdliches, da die Entfernung des Mondes von der Erde in der Erdnähe bis auf 48950 Meilen herabgeht, während sie in der Erdferne bis auf 54650 Meilen steigt.

§. 118. Aufgabe.

Die Höhe AB eines Punktes A, Fig. 51, (z. B. der Spitze eines Thurmes oder des Gipfels eines Berges) über der durch einen gegebenen Punkt C gehenden horizontalen Ebene zu finden.

Auflösung. Wenn von dem gegebenen Punkte C aus eine horizontale Linie nach dem Fußpunkte B, in welchem die zu messende Höhe die durch den gegebenen Punkt C gehende Horizontalebene trifft, gemessen werden kann, so ist die gesuchte Höhe $AB = BC. \text{ tang } ACB$, wie sich sofort aus dem rechtwinkligen Dreiecke ABC ergibt.

Fassen wir indessen die Aufgabe allgemeiner auf, indem wir annehmen, daß von dem gegebenen Punkte aus überhaupt nicht in horizontaler Richtung gemessen werden kann, so messen wir von C aus eine beliebige Standlinie $CD = a$ und den Winkel $CDE = \nu$, unter welchem dieselbe gegen den Horizont geneigt ist, ferner den Elevationswinkel $ACB = \varepsilon$ und die horizontalen Winkel $FDE = \alpha$ und $FED = \beta$*). Dann ist zunächst in dem rechtwinkligen Dreiecke CED $DE = a \cos \nu$,

ferner in dem Dreiecke DEF $EF = \dfrac{DE \sin \alpha}{\sin DFE}$

oder, wenn wir den Werth von DE einsetzen und sin DFE durch $\sin(\alpha + \beta)$ ersetzen,
$$EF = \frac{a \cos \nu \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}.$$
Endlich ist in dem rechtwinkligen Dreiecke ABC, wenn wir die gesuchte Höhe AB mit x bezeichnen,
$$x = BC \text{ tang } \varepsilon = EF \text{ tang } \varepsilon$$
oder, wenn wir den Werth von EF einsetzen,
$$x = \frac{a \cos \nu \sin \alpha \text{ tang } \varepsilon}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

§. 119. Aufgabe.

Die Lage eines Punktes D, an welchem man sich befindet, zu bestimmen, wenn man aus demselben drei mit ihm in der nämlichen Ebene liegende Punkte A, B und C, Fig. 52, von bekannter Lage sehen, aber nicht nach denselben messen kann.

Auflösung. Da nach der Annahme die Punkte A, B und C von D aus gesehen werden können, so ist man im Stande, die Winkel BDC und ADC, welche wir mit α und β bezeichnen wollen, zu messen. Da nun überdies

---

*) Wie die horizontalen Winkel EDF und DEF, nicht aber die in einer schiefen Ebene liegenden Winkel BDC und BCD mit dem Theodolithen gemessen werden können, überlassen wir der mündlichen Erklärung des Lehrers, dem wir es auch anheimgeben müssen, die Schüler mit der Einrichtung dieses Instrumentes bekannt zu machen.

die gegenseitige Lage der Punkte A, B und C als bekannt vorausgesetzt ist, so kennt man auch noch die Linien BC und AC, welche wir der Kürze wegen mit a und b, und den Winkel ACB, welchen wir mit γ bezeichnen. Man kennt daher überhaupt in dem Vierecke ABCD fünf Stücke und kann nun zunächst den gesuchten Punkt D durch geometrische Construction finden, indem man über BC als Sehne einen Kreisbogen, welcher den Winkel α faßt, und über AC einen den Winkel β fassenden Kreisbogen beschreibt. Diese beiden Bogen schneiden sich in dem gesuchten Punkte D.

Durch trigonometrische Rechnung wird die Lage des gesuchten Punktes D in folgender Art bestimmt:

Man sucht zuerst die Winkel CAD und CBD, welche wir x und y nennen, zu berechnen. Die Summe dieser Winkel x + y ist bekannt, nämlich $= 360^0 - (\alpha + \beta + \gamma)$. Bezeichnen wir also der Kürze wegen diese bekannte Summe mit 2σ, so ist

$$1)\quad \sigma = \frac{360^0 - (\alpha + \beta + \gamma)}{2}.$$

Um die Differenz der Winkel x und y, welche wir mit 2ϑ bezeichnen, zu berechnen, suchen wir eine Gleichung zwischen den gegebenen und gesuchten Stücken zu bilden. Wir gelangen hierzu, indem wir die den beiden Dreiecken ACD und BCD gemeinschaftliche Seite CD aus beiden ausdrücken. In dem Dreiecke ACD ist

$$\mathrm{CD} = \frac{\mathrm{b} \sin \mathrm{x}}{\sin \beta}$$

und in dem Dreiecke BCD ist

$$\mathrm{CD} = \frac{\mathrm{a} \sin \mathrm{y}}{\sin \alpha}.$$

Setzen wir diese Werthe einander gleich, so erhalten wir die Gleichung

$$\frac{\mathrm{b} \sin \mathrm{x}}{\sin \beta} = \frac{\mathrm{a} \sin \mathrm{y}}{\sin \alpha} \quad \text{oder} \quad \frac{\sin \mathrm{x}}{\sin \mathrm{y}} = \frac{\mathrm{a} \sin \beta}{\mathrm{b} \sin \alpha}.$$

Wenden wir einen bekannten Satz der Proportionen an, so ergibt sich hieraus weiter

$$\frac{\sin \mathrm{x} - \sin \mathrm{y}}{\sin \mathrm{x} + \sin \mathrm{y}} = \frac{\mathrm{a} \sin \beta - \mathrm{b} \sin \alpha}{\mathrm{a} \sin \beta + \mathrm{b} \sin \alpha}.$$

Da $\mathrm{x} = \sigma + \vartheta$ und $\mathrm{y} = \sigma - \vartheta$ ist, so geht diese Gleichung, wenn wir §. 33 benutzen, über in:

$$\frac{2 \cos \sigma \sin \vartheta}{2 \sin \sigma \cos \vartheta} = \frac{\mathrm{a} \sin \beta - \mathrm{b} \sin \alpha}{\mathrm{a} \sin \beta + \mathrm{b} \sin \alpha}$$

oder

$$\frac{\operatorname{tang} \vartheta}{\operatorname{tang} \sigma} = \frac{\mathrm{a} \sin \beta - \mathrm{b} \sin \alpha}{\mathrm{a} \sin \beta + \mathrm{b} \sin \alpha},$$

also

$$2)\quad \operatorname{tang} \vartheta = \frac{\mathrm{a} \sin \beta - \mathrm{b} \sin \alpha}{\mathrm{a} \sin \beta + \mathrm{b} \sin \alpha} \,.\, \operatorname{tang} \sigma.$$

Hat man aus dieser Gleichung ϑ gefunden, so sind auch $\mathrm{x} = \sigma + \vartheta$ und $\mathrm{y} = \sigma - \vartheta$ bekannt. Man erhält dann leicht weiter

$$3)\quad \mathrm{CD} = \frac{\mathrm{a} \sin \mathrm{y}}{\sin \alpha} = \frac{\mathrm{b} \sin \mathrm{x}}{\sin \beta},$$

$$4)\quad \mathrm{AD} = \frac{\mathrm{b} \sin \mathrm{ACD}}{\sin \beta} \quad \text{und} \quad 5)\quad \mathrm{BD} = \frac{\mathrm{a} \sin \mathrm{BCD}}{\sin \alpha}.$$

Das oben zur Bestimmung des Punktes D angegebene Verfahren stellt sich jedoch als unzulänglich heraus, wenn der Punkt D auf dem durch die drei Punkte A, B und C gehenden Kreise liegt. Die geometrische Construction führt nicht zum Ziele, indem die über AC und BC zu beschreibenden Kreisbogen sich nicht schneiden, sondern zusammenfallen; und die trigonometrische Auflösung wird unbrauchbar, da in einem Vierecke, um welches sich ein Kreis beschreiben läßt, zwei gegenüberstehende Winkel zusammen einen Flachen betragen, folglich $\sigma = 90^0$ und in der Gleichung (2) tang $\sigma = \infty$ wird.

Die so eben behandelte Aufgabe ist eine der schönsten und wichtigsten der praktischen Geometrie und unter dem Namen der Pothenot'schen Aufgabe bekannt. — Wir fügen für dieselbe folgendes Beispiel in bestimmten Zahlen bei:

Es sei gegeben $a = 725$, $b = 569$, $\alpha = 43^0\,24'$, $\beta = 39^0\,47'$ und $\gamma = 132^0\,35'$; dann ist zunächst vermöge Gleichung (1) $\sigma = 72^0\,7'$. Um die Berechnung von tang ϑ nach Gleichung (2) mit größerer Deutlichkeit auszuführen, setzen wir

$$a \sin \beta = u \text{ und } b \sin \alpha = v.$$

Wir erhalten u und v durch folgende Rechnung:

$$\begin{array}{rl} \log a & = 2{,}86034 \\ + \log \sin \beta & = 9{,}80610 - 10 \\ \hline \log u & = 2{,}66644 \\ u & = 463{,}92. \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log b & = 2{,}75511 \\ + \log \sin \alpha & = 9{,}83701 - 10 \\ \hline \log v & = 2{,}59212 \\ v & = 390{,}95. \end{array}$$

Demnach ist $u + v = 854{,}87$ und $u - v = 72{,}97$.

Wir können nun der Gleichung (2) folgende Form geben:

$$\text{tang}\, \vartheta = \frac{(u - v) \text{ tang}\, \sigma}{u + v};$$

wir finden daher ϑ, indem wir in dieser Art weiter rechnen:

$$\begin{array}{rl} \log (u - v) = & 1{,}86314 \\ + \log \text{tang}\, \sigma = & 0{,}49124 \\ \hline & 12{,}35438 - 10 \\ - \log (u + v) = & 2{,}93190 \\ \hline \log \text{tang}\, \vartheta = & 9{,}42248 - 10 \\ \vartheta = & 14^0\,49', \end{array}$$

also $x = \sigma + \vartheta = 86^0\,56'$ und $y = \sigma - \vartheta = 57^0\,18'$.

Endlich wollen wir CD nach Gleichung (3) berechnen:

$$\begin{array}{rl} \log \sin y = & 9{,}92506 - 10 \\ + \log a = & 2{,}86034 \\ \hline & 12{,}78540 - 10 \\ - \log \sin \alpha = & 9{,}83701 - 10 \\ \hline \log CD = & 2{,}94839 \\ CD = & 887{,}96. \end{array}$$

Für solche Leser, welche häufig in den Fall kommen, trigonometrische Rechnungen auszuführen, bemerken wir noch: — Wenn in dem Quotienten

$$\frac{u - v}{u + v}$$

nicht u und v unmittelbar, sondern, wie im obigen Beispiele, ihre Logarithmen bekannt sind, so läßt sich der Logarithmus dieses Bruches am rascheſten durch folgendes Verfahren

erhalten: — Man suche einen Hilfswinkel φ nach der Gleichung

$$\text{I. } \operatorname{tang} \varphi = \frac{v}{u};$$

dann ist

$$\frac{u-v}{u+v} = \frac{1-\operatorname{tang}\varphi}{1+\operatorname{tang}\varphi} = \frac{\operatorname{tang} 45^0 - \operatorname{tang}\varphi}{1+\operatorname{tang} 45^0 \,.\, \operatorname{tang}\varphi},$$

indem bekanntlich $\operatorname{tang} 45^0 = 1$ ist. Nach §. 36,a können wir aber hier auch setzen:

$$\text{II. } \frac{u-v}{u+v} = \operatorname{tang}(45^0 - \varphi).$$

Substituiren wir diesen Werth in die obige Gleichung (2), so verwandelt sich dieselbe in:

$$\operatorname{tang} \vartheta = \operatorname{tang}(45^0 - \varphi) \,.\, \operatorname{tang} \sigma,$$

und die Rechnung ist nun folgende:

$$\begin{aligned} \log v &= 12{,}59212 - 10 \\ -\log u &= 2{,}66644 \\ \hline \log \operatorname{tang} \varphi &= 9{,}92568 - 10 \\ \varphi &= 40^0\, 7'\, 16'', \text{ also } 45^0 - \varphi = 4^0\, 52'\, 44''. \\ \log \operatorname{tang}(45^0 - \varphi) &= 8{,}93125 - 10 \\ +\log \operatorname{tang} \sigma &= 0{,}49124 \\ \hline \log \operatorname{tang} \vartheta &= 9{,}42249 - 10, \end{aligned}$$

dasselbe Resultat, welches wir auch oben erhalten haben.

Fünfter Abschnitt.

Polygonometrie.

A. Umformung der Coordinaten.

§. 120. Erklärung.

So wie die Trigonometrie die gegenseitige Abhängigkeit der Seiten und Winkel eines Dreiecks durch trigonometrische Gleichungen darstellt, so beschäftigt sich die Polygonometrie mit der Auflösung dieser Aufgabe für Vielecke überhaupt.

Man gelangt hierzu am bequemsten, indem man in der Ebene des Vielecks zwei sich senkrecht durchschneidende Axen annimmt und die Ecken des Vielecks durch ihre Abscissen und Ordinaten feststellt. Ehe wir jedoch hierzu übergehen, schicken wir noch einige für die Auflösung der angeführten Aufgabe unentbehrliche Sätze über Coordinaten überhaupt voraus.

Bemerkung.

Da die Lage der Coordinatenaxen eine ganz willkürliche ist, so muß es frei stehen, jede zwei sich senkrecht durchschneidende Linien als Axen anzunehmen. Andererseits ist klar, daß mit der sich ändernden Lage der Coordinatenaxen auch die Abscisse und Ordinate eines jeden auf diese Axen bezogenen Punktes ihre Werthe ändern. Wir beschränken uns jedoch hier auf den Fall, welcher für die polygonometrischen Entwickelungen ausreicht, daß die in Betracht zu ziehenden Axenpaare einander parallel laufen.

§. 121. Lehrsatz.

Wenn man eine feste Linie AX, Fig. 53 und 54, als Abscissenaxe und das einemal eine zu derselben senkrechte Linie AY, welche sie im Punkte A durchschneidet, ein anderesmal die Senkrechte $A'Y'$, welche die Abscissenaxe in einem anderen Punkte A' durchschneidet, als Ordinatenaxe annimmt, so ist für jeden willkürlichen Punkt die Ordinate in beiden Fällen dieselbe, die Abscisse dagegen eine verschiedene. Bezeichnen wir mit x die Abscisse irgend eines Punktes für den ersten Anfangspunkt A, mit x' die Abscisse desselben Punktes für den zweiten Anfangspunkt A' und mit p die Abscisse des zweiten Anfangspunktes A' in Beziehung auf den ersten Anfangspunkt A, so ist allemal

$$x = p + x'.$$

Beweis. Es sei zunächst, Fig. 53, p positiv $= + AA'$; dann ist

1) für den Punkt C (für welchen x und x' beide positiv sind)

$$x = + AD \text{ und } x' = + A'D,$$

folglich $$p + x' = AA' + A'D = AD = x;$$

2) für den Punkt E (für welchen x positiv, aber x' negativ ist)

$$x = + AF,\ x' = - A'F,$$

folglich $$p + x' = AA' - A'F = + AF = x;$$

3) für den Punkt G (für welchen x und x' beide negativ sind)

$$x = - AH \text{ und } x' = - A'H,$$

folglich $$p + x' = + AA' - A'H = - AH = x.$$

Ist zweitens p negativ $= - AA'$, Fig. 54, so haben wir wieder die nämlichen drei verschiedenen Lagen des festzustellenden Punktes wie im vorhergehenden Hauptfalle zu unterscheiden. Es ist dann

1) für den Punkt C $x = + AD$ und $x' = + A'D$,

folglich $$p + x' = - AA' + A'D = + AD = x;$$

2) für den Punkt E $x = - AF$ und $x' = + A'F$,

folglich $$p + x' = - AA' + A'F = - AF = x;$$

3) für den Punkt G $x = - AH$ und $x' = - A'H$,

folglich $$p + x' = - AA' - A'H = - AH = x.$$

Außer den oben erörterten Fällen kann der festzustellende Punkt auch noch in einer der beiden Ordinatenaxen liegen, also x oder $x' = 0$ sein. Wir haben jedoch diese leicht zu erledigenden Fälle, um nicht zu weitläufig zu werden, übergangen.

§. 122. Zusatz.

So wie wir im vorhergehenden Paragraphen den Anfangspunkt der Coordinaten in der Abscissenaxe verlegt haben, so kann man denselben auch in der Ordinatenaxe verlegen. Bezeichnen wir dann die Ordinate eines dritten Punktes für den einen Anfangspunkt mit y, für den andern mit y', ferner die Ordinate des letztern Anfangspunktes für den erstern mit q, so ist

$$y = q + y'.$$

Der Beweis ist der nämliche wie der des vorhergehenden Paragraphen.

§. 123. Lehrsatz.

Wenn man den Anfangspunkt der Coordinaten A, Fig. 55, in irgend einen andern Punkt A' verlegt, ohne indessen, wie bereits oben bemerkt, die Richtung der Axen zu ändern, und die Coordinaten eines dritten Punktes C für den Anfangspunkt A mit x und y, für den andern Anfangspunkt A'

mit x' und y', ferner die Coordinaten des zweiten Anfangspunktes für den ersten mit p und q bezeichnet, so ist

$$x = p + x' \text{ und } y = q + y'.$$

Beweis. Wenn wir den Durchschnittspunkt der zweiten Ordinatenaxe und der ersten Abscissenaxe mit A'' bezeichnen und zunächst den Anfangspunkt von A nach A'' verlegen, so bleibt für's erste die Ordinate unverändert, die Abscisse dagegen geht nach §. 121 über in

$$x' = x - p.$$

Verlegen wir dann ferner den Anfangspunkt von A'' nach A', so ändert sich die Abscisse nicht weiter, dagegen verwandelt sich die Ordinate nach §. 122 in

$$y' = y - q.$$

Wenn in einer Linie drei Punkte C, A und B, Fig. 1, gegeben sind, und wir bezeichnen den Abstand des Punktes A von C mit a, den Abstand des Punkts B von A mit b und den Abstand des Punktes B von C mit c, so ist

$$c = a + b.$$

Diese Gleichung gilt jedoch nur für den in der Figur dargestellten Fall; sie verliert ihre Richtigkeit, wenn die Punkte A, B und C eine andere Lage haben, z. B. der Punkt B zwischen C und A oder in der über C fortgesetzten Verlängerung der Linie AC liegt. Die obige Gleichung behält dagegen, wie wir gesehen haben, ihre Giltigkeit in allen möglichen Fällen bei, wenn wir unter den Buchstaben a, b, c nicht mehr die absoluten Maßzahlen von Linien, sondern Abscissen oder Ordinaten verstehen, welche nach der Verschiedenheit ihrer Lage als positiv oder negativ angenommen werden. Es ist daher diese Annahme nicht eine willkürliche, sondern aus der Natur der Sache selbst mit Nothwendigkeit hervorgehend, da ohne dieselbe ein allgemeines Operiren in analytischer Darstellung überhaupt nicht möglich sein würde.

Bemerkung.

Durch den vorhergehenden Lehrsatz werden wir in den Stand gesetzt, mehrere für die Entwickelungen der Polygonometrie wichtige Aufgaben (§§. 124, 129 und 130) zu lösen.

§. 124. Aufgabe.

Die Entfernung BD = a zweier Punkte B und D, Fig. 56, zu berechnen, wenn die Coordinaten des einen Punktes B gleich x und y und die des andern D gleich x' und y' gegeben sind.

Auflösung. $a = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$.

Beweis. Denken wir uns den Anfangspunkt der Coordinaten in einen dieser Punkte selbst, z. B. in den Punkt B verlegt, und bezeichnen wir die Coordinaten des andern Punktes D für diesen Anfangspunkt mit u und v, so ist nach §. 5 $a^2 = u^2 + v^2$.

Zufolge des vorhergehenden §. ist aber

$$x' = x + u \text{ und } y' = y + v,$$

folglich $u = x' - x$ und $v = y' - y$.

Setzen wir diese Werthe in die vorhergehende Gleichung ein, so verwandelt sich dieselbe in $a^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2$.

§. 125. Erklärung.

Wenn zwei Linien BC und BD, Fig. 57, von einem Punkte ausgehen, (ohne selbst wieder eine gerade Linie zu bilden), so schließen dieselben einen

hohlen und einen erhabenen Winkel ein, welche sich zu 360⁰ ergänzen. Da im Folgenden bald der eine, bald der andere dieser Winkel in Betracht gezogen werden soll, so ist es nothwendig, eine gewisse Bestimmung darüber festzusetzen, welcher von beiden Winkeln in jedem besonderen Falle in Anwendung zu bringen ist. Bekanntlich können wir uns jeden Winkel dadurch entstanden denken, daß der eine Schenkel BC um den Scheitelpunkt B bis in die Lage des andern Schenkels BD gedreht worden ist. Je nachdem diese Drehung nach der einen oder andern Seite ausgeführt wird, erzeugt der bewegte Schenkel einen hohlen oder erhabenen Winkel. Um nun Zweideutigkeit auszuschließen, wollen wir im Folgenden annehmen, daß diese Drehung allemal in der bereits in §. 4 angegebenen (und in der Figur durch einen beigesetzten Pfeil angedeuteten) Richtung erfolgt, nämlich in derjenigen Richtung, in welcher der positive Schenkel der Abscissenaxe 90⁰ durchläuft, um in die Lage des positiven Schenkels der Ordinatenaxe zu gelangen.

Unter dem Winkel, um welchen eine Linie BD von einer andern Linie BC abweicht, werden wir demgemäß im Folgenden allemal denjenigen (hohlen oder erhabenen) Winkel verstehen, um welchen die letztere Linie BC in der festgestellten Richtung gedreht werden muß, um in die Lage der ersteren Linie BD zu gelangen.

(Hiernach weicht in der Figur BD von BC um einen hohlen, BC aber von BD um einen erhabenen Winkel ab, d. h. die Linie BD beschreibt einen erhabenen Winkel, wenn sie in der angegebenen Richtung bis in die Lage der Linie BC gedreht wird.)

Da die Drehung des bewegten Schenkels nach zwei entgegengesetzten Richtungen erfolgen kann, so kann man auch die Winkel, welche durch die Drehung in der angegebenen Richtung hervorgehen, als positiv, und diejenigen, welche durch eine Drehung in der entgegengesetzten Richtung erzeugt werden, als negativ bezeichnen. Ist z. B. Fig. 57 der hohle Winkel DBC $= \alpha$, der erhabene $= \beta$, so kann man die Größe, um welche die Linie BD von BC abweicht, eben sowohl durch $+ \alpha$ als durch $- \beta$, und die Abweichung der Linie BC von BD sowohl durch $+ \beta$ als durch $- \alpha$ ausdrücken.

§. 126. Erklärung.

Wenn von einem bestimmten Punkte B, Fig. 57, eine oder mehrere Linien BC, BD . . ausgehen, so wird die Lage derselben offenbar festgestellt sein, wenn man die Winkel kennt, welche sie mit einer gegebenen Linie bilden. Als die letztere pflegt man eine mit dem positiven Schenkel der Abscissenaxe parallele Linie BE zu wählen. Der Winkel, um welchen die Linie BC (oder BD) von dieser durch den Endpunkt B mit dem positiven Schenkel der Abscissenaxe parallel gezogenen Linie BE abweicht, wird vorzugsweise der Abweichungswinkel der Linie BC (oder BD) in dem Endpunkte B genannt.

§. 127. Zusatz.

Wenn wir eine Linie BC, Fig. 57, über den einen Endpunkt C verlängern, so ist der Abweichungswinkel der Verlängerung CF im Endpunkte C (d. h. der Winkel, um welchen die Verlängerung CF von einer mit dem positiven Schenkel der Abscissenaxe parallel gezogenen Linie CG abweicht), gleich dem Abweichungswinkel der Linie BC selbst im andern Endpunkte B,

(d. h. dem Winkel, um welchen die Linie BC von der zur Abscissenaxe parallelen Linie BE abweicht).

Dagegen ist der Abweichungswinkel der Linie BC in dem einen Endpunkte B von dem Abweichungswinkel dieser Linie in dem andern Endpunkte C um 180^0 verschieden. Denn der erstere Abweichungswinkel entsteht, wenn wir die Linie BE, der andere, wenn wir die Linie CG in der vorgeschriebenen Richtung so lange um die Punkte B und C herumdrehen, bis die erstere mit BC, die andere mit CB zusammenfällt. Von den durch diese Drehung erzeugten Winkeln übertrifft aber der eine den andern offenbar um 180^0.

§. 128. Erklärung.

Da zwei Winkel, welche sich um 360^0 unterscheiden, in der Zeichnung nicht von einander verschieden sind und überdies nach §. 12 die nämlichen trigonometrischen Functionen haben, so werden wir im Folgenden auch solche Winkel, deren Differenz 360^0 oder ein Vielfaches von 360^0 beträgt, einander gleich setzen. — Bezeichnet daher α irgend einen in Graden ausgedrückten Winkel, so ist zufolge der vorstehenden Erklärung

$$\alpha = 360^0 + \alpha = 720^0 + \alpha \text{ u. s. w.}$$

Wie wir in der Anmerkung zu §. 125 gesehen haben, kann der Winkel, um welchen eine Linie BD, Fig. 57, von einer andern BC abweicht, eben sowohl positiv als negativ ausgedrückt werden. Bezeichnen wir den erstern mit $+\alpha$, den letztern mit $-\beta$, so ist $\alpha + \beta = 360^0$, d. h. wenn wir die Linie BC das einemal nach der einen, das anderemal nach der entgegengesetzten Seite um den Punkt B so lange herumdrehen, bis sie in die Lage der Linie BD kommt, so ergänzen sich die durch diese Drehung entstandenen Winkel zu 360^0. Demnach ist die algebraische Differenz von $+\alpha$ und $-\beta$, d. h. $+\alpha - (-\beta) = \alpha + \beta = 360^0$. Es ist daher in dem Sinne der oben aufgestellten Erklärung der positive Abweichungswinkel $+\alpha$ allemal gleich dem negativen Abweichungswinkel $-\beta$.

§. 129. Aufgabe.

Aus den Coordinaten x und y des einen Endpunktes B einer Linie und aus den Coordinaten x' und y' des andern Endpunktes C dieser Linie den Abweichungswinkel α dieser Linie für den ersten Endpunkt B zu berechnen, Fig. 57.

Auflösung. $$\text{tang } \alpha = \frac{y' - y}{x' - x}.$$

Beweis. Verlegen wir den Anfangspunkt der Coordinaten in den Endpunkt B und bezeichnen wir die Coordinaten des andern Endpunktes C für diesen Anfangspunkt mit u und v, so ist

$$u = x' - x \text{ und } v = y' - y.$$

Zufolge der in §. 7 aufgestellten Erklärung ist aber

$$\text{tang } \alpha = \frac{v}{u} = \frac{y' - y}{x' - x}.$$

§. 130. Aufgabe.

Von einer Linie BC = a, Fig. 57, ist der Abweichungswinkel für den einen Endpunkt B gleich α und die Coordinaten dieses Endpunktes sind gleich x und y gegeben; es sollen hieraus die Coordinaten x' und y' des andern Endpunktes C berechnet werden.

Auflösung. $x' = x + a \cos \alpha$ und $y' = y + a \sin \alpha$.

Beweis. Haben u und v die in §. 124 angegebene Bedeutung, so ist

nach §. 7 $\frac{u}{a} = \cos\alpha$ und $\frac{v}{a} = \sin\alpha$

oder $u = a\cos\alpha$ und $v = a\sin\alpha$,

folglich $x' = x + u = x + a\cos\alpha$

und $y' = y + v = y + a\sin\alpha$.

B. Gleichungen über das Vieleck.

§. 131. Erklärung.

Bei den folgenden Entwicklungen über Vielecke werden wir allemal eine Seite und eine in derselben liegende Ecke als die erste annehmen und dann die übrigen Seiten und Ecken des Vielecks in der mehrfach besprochenen Richtung weiter zählen. — Wir bezeichnen demgemäß die Seiten des in Fig. 58 verzeichneten Vielecks mit $a_1, a_2, a_3 \ldots$

Wenn wir jede Seite über den Endpunkt, welchen sie mit der folgenden Seite gemeinschaftlich hat, hinaus verlängern, so bezeichnen wir den entstandenen Außenwinkel, um welchen eine folgende Seite von der Verlängerung der vorhergehenden abweicht, mit $A_1, A_2, A_3 \ldots$ Wir verstehen also z. B. unter A_3 denjenigen Winkel, um welchen die Seite a_3 von der Verlängerung der Seite a_2 abweicht.

§. 132. Zusatz.

An denjenigen Ecken, an welchen die innern Winkel eines Vielecks hohle sind, sind auch die zugehörigen Außenwinkel hohl, so z. B. in dem Sechsecke der Fig. 58 an den Ecken A_1, A_2, A_3, A_4 und A_6. Dagegen ist der Außenwinkel an der Ecke A_5, an welcher der innere Winkel des Vielecks ein erhabener ist, ebenfalls größer als ein flacher. Denn es ist klar, daß die Verlängerung der Seite a_4 um einen erhabenen Winkel in der festgestellten Richtung gedreht werden muß, um in die Lage der Seite a_5 zu gelangen.

Wir können jedoch diesen erhabenen Außenwinkel A_5 zufolge des in der Anmerkung zu §. 125 Gesagten auch durch einen negativ ausgedrückten hohlen Winkel ersetzen, welchen die Verlängerung der Seite a_4 beschreibt, wenn wir dieselbe in der entgegengesetzten Richtung bis in die Lage der Seite a_5 drehen.

§. 133. Erklärung.

Im Folgenden werden wir die Coordinaten der ersten Ecke A_1 eines Vielecks mit x_1 und y_1, der zweiten Ecke A_2 mit x_2 und y_2 u. s. w. und die Abweichungswinkel der Seiten $a_1, a_2 \ldots$, welche sie in ihren ersten Endpunkten $A_1, A_2 \ldots$ bilden, mit $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$ bezeichnen.

Da die Lage der Coordinatenaxen, auf welche die Seiten und Ecken des Vielecks bezogen werden sollen, eine ganz willkürliche ist, läßt sich dieselbe allemal so wählen, daß sämmtliche Ecken des Vielecks in die erste Region fallen, wie dies z. B. bei den in Fig. 58, 59 und 60 verzeichneten Vielecken der Fall ist.

Die folgenden Sätze gelten jedoch nicht blos für diesen beschränkten Fall, welcher in praktischer Hinsicht die meiste Bequemlichkeit gewährt, sondern ganz allgemein für jedes Axenpaar.

Wir wenden uns nun zu der Aufgabe, wenn von einem Vielecke die Seiten a_1, a_2, a_3 und die Außenwinkel $A_1, A_2, A_3 \ldots$, ferner die Coordinaten der ersten Ecke x_1 und y_1 und der Abweichungswinkel der ersten Seite α_1 gegeben sind, die nämliche Bestimmung für die übrigen Seiten und Ecken des Vielecks herzuleiten.

§. 134. Lehrsatz.

Bezeichnen wir irgend eine Seite des Vielecks mit a_h, den Abweichungswinkel derselben mit α_h, ferner die Coordinaten ihres ersten Endpunktes, d. h. desjenigen, welchen sie mit der vorhergehenden Seite gemeinschaftlich hat, mit x_h und y_h, so ist

1) $\alpha_h = \alpha_1 + A_2 + A_3 \ldots\ldots + A_h$,

2) $x_h = x_1 + a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2 \ldots\ldots + a_{h-1} \cos \alpha_{h-1}$,

3) $y_h = y_1 + a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2 \ldots + a_{h-1} \sin \alpha_{h-1}$.

Beweis. 1) Wenn wir uns durch die Ecke A_2 eine Parallele A_2B_2, Fig. 58, mit dem positiven Schenkel der Abscissenaxe gezogen denken, so ist nach §. 127 der Winkel, um welchen die Verlängerung der Seite a_1 von dieser Parallelen abweicht, $= \alpha_1$ und der Abweichungswinkel der Seite a_2 offenbar der Summe aus diesem Winkel und dem Außenwinkel A_2 gleich, folglich

$$\alpha_2 = \alpha_1 + A_2.$$

Ebenso finden wir: $\alpha_3 = \alpha_2 + A_3$ oder, wenn wir den Werth von α_2 einsetzen,

$$\alpha_3 = \alpha_1 + A_2 + A_3.$$

Auf demselben Wege fortfahrend erhalten wir

$$\alpha_4 = \alpha_1 + A_2 + A_3 + A_4,$$
$$\alpha_5 = \alpha_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 \text{ u. s. w.}$$

2) Zufolge des §. 130 ist

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + a_1 \cos \alpha_1 \\ x_3 &= x_2 + a_2 \cos \alpha_2 \\ &= x_1 + a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2 \\ x_4 &= x_3 + a_3 \cos \alpha_3 \\ &= x_1 + a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2 + a_3 \cos \alpha_3 \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

3) Nach dem eben angeführten §. ist ferner

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + a_1 \sin \alpha_1 \\ y_3 &= y_2 + a_2 \sin \alpha_2 \\ &= y_1 + a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2 \\ y_4 &= y_3 + a_3 \sin \alpha_3 \\ &= y_1 + a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2 + a_3 \sin \alpha_3 \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

§. 135. Lehrsatz.

Bezeichnen wir mit n die Anzahl der Ecken eines Vielecks, so finden zwischen den Seiten und Winkeln desselben allemal folgende Gleichungen statt:

1) $o = A_1 + A_2 + A_3 \ldots\ldots + A_n$

$$2)\ o = \begin{cases} a_1 \cos A_1 \\ + a_2 \cos (A_1 + A_2) \\ + a_3 \cos (A_1 + A_2 + A_3) \\ \quad\vdots \\ + a_{n-1} \cos (A_1 + A_2 \ldots + A_{n-1}) \\ + a_n \end{cases}$$

$$3)\ o = \begin{cases} a_1 \sin A_1 \\ + a_2 \sin (A_1 + A_2) \\ + a_3 \sin (A_1 + A_2 + A_3) \\ \quad\vdots \\ + a_{n-1} \sin (A_1 + A_2 \ldots + A_{n-1}). \end{cases}$$

Beweis. 1) Um größerer Deutlichkeit willen wollen wir den Beweis an einem Sechsecke, Fig. 59, führen. Da ferner die Lage der Coordinatenaxen ganz willkürlich ist, so wird es uns frei stehen, dieselben so anzunehmen, daß die letzte Seite des Vielecks A_6A_1 dem positiven Schenkel der Abscissenaxe parallel ist. Dann ist der Abweichungswinkel dieser Seite α_6 offenbar $= o$ und der Abweichungswinkel α_1 der ersten Seite gleich dem Außenwinkel A_1. Zufolge des vorhergehenden §. ist aber

$$\alpha_6 = \alpha_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6.$$

Setzen wir die angegebenen Werthe, $\alpha_6 = o$ und $\alpha_1 = A_1$, in diese Gleichung ein, so verwandelt sich dieselbe in:

$$o = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6,$$

d. h. die Summe aller Außenwinkel eines Vielecks ist einem Vielfachen von 360^0 gleich*).

2) Nach den vorhergehenden §§. ist

$$x_6 = x_1 + a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2 + a_3 \cos \alpha_3 + a_4 \cos \alpha_4 + a_5 \cos \alpha_5.$$

Nun ist aber zufolge unserer Annahme, daß die Seite A_6A_1 mit dem positiven Schenkel der Abscissenaxe parallel läuft, offenbar

$$x_1 = x_6 + a_6;$$

ferner $\alpha_1 = A_1$, daher nach dem vorhergehenden §. $\alpha_2 = A_1 + A_2$, $\alpha_3 = A_1 + A_2 + A_3$ u. s. w. Hiernach verwandelt sich die vorhergehende Gleichung in die folgende:

$$o = \begin{cases} a_1 \cos A_1 + a_2 \cos (A_1 + A_2) + a_3 \cos (A_1 + A_2 + A_3) \\ + a_4 \cos (A_1 + A_2 + A_3 + A_4) \\ + a_5 \cos (A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5) \\ + a_6. \end{cases}$$

3) Zufolge des vorhergehenden §. ist

$$y_6 = y_1 + a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2 + a_3 \sin \alpha_3 + a_4 \sin \alpha_4 + a_5 \sin \alpha_5.$$

Da wir die Seite A_6A_1 mit der Abscissenaxe parallel angenommen haben, so ist $y_6 = y_1$, wonach die vorhergehende Gleichung, wenn wir statt α_1, $\alpha_2 \ldots$ ihre Werthe setzen, übergeht in:

$$o = \begin{cases} a_1 \sin A_1 + a_2 \sin (A_1 + A_2) + a_3 \sin (A_1 + A_2 + A_3) \\ + a_4 \sin (A_1 + A_2 + A_3 + A_4) + a_5 \sin (A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5). \end{cases}$$

§. 136. Zusatz.

Der vorhergehende §. hat uns drei Gleichungen kennen gelehrt, welche zwischen den nSeiten und nWinkeln eines jeden nEcks stattfinden. Im allgemeinen muß es daher möglich sein, wenn von diesen 2nStücken 2n — 3 gegeben sind, die fehlenden 3 mit Hilfe jener Gleichungen zu finden. Die Ausführung der erforderlichen Rechnungen ist jedoch theils schwierig, theils weitläufig und daher für die praktische Anwendung ungeeignet.

---

*) Man kann sich hiervon auch noch in folgender Art überzeugen: Wenn wir uns die Seite a_6 um die Ecke A_6 allmählich so herumgedreht denken, daß sie zunächst der Seite a_1, dann ferner der Seite a_2, a_3, a_4, a_5 parallel wird, und endlich noch so weit drehen, bis sie wieder in ihre ursprüngliche Lage fällt, so hat sie bei dieser Drehung, wenn die inneren Winkel des Vielecks sämmtlich hohl sind, 360^0 einmal, wenn aber unter diesen Winkeln auch erhabene sind, mehrmals durchlaufen.

Wenn das aufzulösende Vieleck ein Dreieck, also n = 3 ist, so gehen die Gleichungen (2) und (3) in die folgenden über:

$$o = a_1 \cos A_1 + a_2 \cos (A_1 + A_2) + a_3$$

und

$$o = a_1 \sin A_1 + a_2 \sin (A_1 + A_2).$$

Bezeichnen wir die an den Ecken A_1, A_2, A_3 liegenden innern Winkel des Dreiecks beziehlich mit B, C und A, wie dieses Fig. 61 zeigt, so ist

$$A_1 = 180^0 - B,\ A_2 = 180^0 - C,\ A_3 = 180^0 - A.$$

Bezeichnen wir ferner noch die den Winkeln A, B, C gegenüberliegenden Seiten mit a, b, c, ersetzen wir also a_1 durch a, a_2 durch b, und a_3 durch c, so verwandeln sich die obigen Gleichungen in:

$$o = a \cos A_1 + b \cos (A_1 + A_2) + c$$

und

$$o = a \sin A_1 + b \sin (A_1 + A_2).$$

Nun ist aber

$$\cos A_1 = \cos (180^0 - B) = -\cos B$$
$$\sin A_1 = \sin (180^0 - B) = +\sin B$$
$$\cos (A_1 + A_2) = \cos (360^0 - (B + C)) = +\cos (B + C) = -\cos A$$
$$\sin (A_1 + A_2) = \sin (360^0 - (B + C)) = -\sin (B + C) = -\sin A.$$

Setzen wir diese Werthe in die vorhergehenden Gleichungen ein, so erhalten wir

$$o = -a \cos B - b \cos A + c$$

und

$$o = a \sin B - b \sin A$$

oder

$$c = a \cos B + b \cos A$$

und

$$a \sin B = b \sin A.$$

Es sind daher die in §. 53 und 54 aufgeführten Fundamentalgleichungen specielle Fälle der allgemeinen Gleichungen des vorhergehenden §., welche für alle Vielecke ohne Ausnahme gelten und in jene übergehen, wenn man die Zahl der Seiten n = 3 annimmt.

Wenn wir in den Gleichungen (2) und (3) des vorhergehenden §. der Kürze wegen $A_1 = \alpha_1$, $A_1 + A_2 = \alpha_2$, $A_1 + A_2 + A_3 = \alpha_3$ u. s. w. setzen, so können wir denselben die folgende Form geben:

$$-a_n = a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2 + a_3 \cos \alpha_3 \ldots\ldots + a_{n-1} \cos \alpha_{n-1}$$

und

$$o = a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2 + a_3 \sin \alpha_3 \ldots\ldots + a_{n-1} \sin \alpha_{n-1}.$$

Wenn wir diese Gleichungen quadriren, die entstandenen Quadrate addiren und zugleich erwägen, daß

$$a_1^2 \cos \alpha_1^2 + a_1^2 \sin \alpha_1^2 = a_1^2$$
$$a_2^2 \cos \alpha_2^2 + a_2^2 \sin \alpha_2^2 = a_2^2 \text{ u. s. w.}$$

ferner $2a_1\, a_2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + 2a_1\, a_2 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 = 2a_1\, a_2 \cos (\alpha_2 - \alpha_1)$

$$2a_1\, a_3 \cos \alpha_1 \cos \alpha_3 + 2a_1\, a_3 \sin \alpha_1 \sin \alpha_3 = 2a_1\, a_3 \cos (\alpha_3 - \alpha_2)$$

ist, so erhalten wir folgende Gleichung:

$$a_n^2 = \left\{ \begin{array}{l} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \ldots\ldots\ldots + a^2_{n-1} \\ + 2a_1a_2\cos(\alpha_2-\alpha_1) + 2a_1a_3\cos(\alpha_3-\alpha_1) \ldots + 2a_1a_{n-1}\cos(\alpha_{n-1}-\alpha_1) \\ \qquad + 2a_2a_3\cos(\alpha_3-\alpha_2) \ldots + 2a_2a_{n-1}\cos(\alpha_{n-1}-\alpha_2) \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad + 2a_{n-2}\, a_{n-1} \cos(\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2}). \end{array} \right.$$

Zufolge unserer Bezeichnung ist

$$\alpha_2 - \alpha_1 = A_2$$
$$\alpha_3 - \alpha_1 = A_2 + A_3$$
$$\alpha_{n-1} - \alpha_1 = A_2 + A_3 \ldots + A_{n-1}$$
$$\alpha_3 - \alpha_2 = A_3$$
$$\alpha_{n-1} - \alpha_2 = A_3 + A_4 \ldots\ldots + A_{n-1}$$
$$\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2} = A_{n-1}.$$

Hiernach geht die vorstehende Gleichung in die folgende über:

$$a_n^2 = \begin{cases} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \ldots\ldots + a_{n-1}^2 \\ + 2a_1a_2\cos A_2 + 2a_1a_3\cos(A_2 + A_3) \ldots\ldots + 2a_1a_{n-1}\cos(A_2 + A_3 \ldots + A_{n-1}) \\ \qquad + 2a_2a_3\cos A_3 \ldots\ldots + 2a_2a_{n-1}\cos(A_3 + A_4 \ldots + A_{n-1}) \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad + 2a_{n-2}a_{n-1}\cos A_{n-1}. \end{cases}$$

Diese Gleichung bildet offenbar eine Analogie zu der Gleichung

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

und könnte dazu dienen, wenn von einem Vielecke alle Seiten und Winkel bis auf eine Seite a_n und die ihr anliegenden Winkel A_n und A_1 gegeben sind, die fehlende Seite a_n zu berechnen.

Um einen der fehlenden Winkel, z. B. A_1 zu erhalten, setzen wir in der Gleichung

$$o = a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2 + a_3 \sin \alpha_3 \ldots + a_{n-1} \sin \alpha_{n-1}$$

statt $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ ihre oben angegebenen Werthe, wodurch sich dieselbe verwandelt in:

$$o = a_1 \sin A_1 + a_2 \sin (A_1 + A_2) + a_3 \sin (A_1 + A_2 + A_3)$$
$$\ldots + a_{n-1} \sin (A_1 + A_2 \ldots + A_{n-1}).$$

Bringen wir in den eingeschlossenen Ausdrücken A_1 aus den Klammern heraus, indem wir nach der Summenformel entwickeln, so erhalten wir

$$o = a_1 \sin A_1 + a_2 \sin A_1 \cos A_2 + a_2 \cos A_1 \sin A_2$$
$$+ a_3 \sin A_1 \cos (A_2 + A_3) + a_3 \cos A_1 \sin (A_2 + A_3)$$
$$\ldots + a_{n-1} \sin A_1 \cos (A_2 + A_3 \ldots + A_{n-1}) + a_{n-1} \cos A_1 \sin (A_2 + A_3 \ldots + A_{n-1}).$$

Dividiren wir die ganze Gleichung durch $\cos A_1$ und ersetzen $\frac{\sin A_1}{\cos A_1}$ durch $\operatorname{tang} A_1$, so ergibt sich $- \operatorname{tang} A_1$

$$= \frac{a_2 \sin A_2 + a_3 \sin (A_2 + A_3) \ldots + a_{n-1} \sin (A_2 + A_3 \ldots + A_{n-1})}{a_1 + a_2 \cos A_2 + a_3 \cos (A_2 + A_3) \ldots + a_{n-1} \cos (A_2 + A_3 \ldots + A_{n-1})}.$$

§. 137. Zusatz.

Die vorhergehenden Paragraphen finden wichtige Anwendungen beim Feldmessen; hat man nämlich die Seiten und Winkel eines Vielecks gemessen und will von demselben eine Zeichnung nach einem verjüngten Maßstabe entwerfen, so verfährt man am vortheilhaftesten auf die Art, daß man zuerst zwei sich senkrecht durchschneidende Linien zeichnet, dann den Coordinaten irgend einer Ecke, welche man als die erste annimmt, eine willkürliche, aber solche Größe beilegt, daß auch alle andern Ecken in die erste Region fallen und der letzten Seite eine zur Abscissenaxe parallele Lage gibt, hierauf nach der Gleichung (1) des §. 134 die Abweichungswinkel der übrigen Seiten und dann weiter nach den Gleichungen (2) und (3) die Coordinaten sämmtlicher Ecken berechnet. Mit Hilfe der erhaltenen Werthe der Coordinaten lassen sich nun die einzelnen Ecken sehr leicht und mit einem hohen Grade von Genauigkeit in die Zeichnung eintragen, indem jede Ecke als der Durchschnitt zweier sich senkrecht durchschneidenden Linien erhalten wird. Man trägt nämlich die Abscisse und Ordinate der zu bestimmenden Ecke beziehlich auf die Abscissen- und Ordinatenaxe auf und zieht durch die Endpunkte Parallelen mit den Axen; der Durchschnitt dieser Parallelen ist die gesuchte Ecke.

Durch die Gleichungen der §§. 124 und 129 wird man überdies noch

in den Stand gesetzt, die Länge und den Abweichungswinkel einer beliebigen Diagonale des Vierecks zu berechnen.

Obschon vermöge der Gleichungen des §. 135 von den nSeiten und nWinkeln eines n=Ecks nur $2n - 3$ Stücke gegeben zu sein brauchen und die noch fehlenden 3 Stücke durch jene Gleichungen gefunden werden können, so wird man es doch, wenn nicht beträchtliche Hindernisse entgegenstehen, vorziehen, sämmtliche Seiten und Winkel eines Vielecks zu messen. Man kann dann jene Gleichungen dazu benutzen, die Richtigkeit der ausgeführten Messungen zu prüfen. Wegen der mit jeder Messung unvermeidlich verbundenen Fehler wird es fast nie der Fall sein, daß die Resultate der Messung jenen Gleichungen vollkommen Genüge leisten. So lange nun die Abweichung nicht eine solche Größe erreicht, daß die ausgeführte Messung überhaupt verworfen und von neuem unternommen werden muß, wird man die angeführten Gleichungen dazu benutzen, die begangenen Fehler zu vertheilen und hierdurch zu verhindern, daß dieselben sich in einem Punkte (dem letzten) anhäufen. Findet man nämlich zunächst, daß die Summe aller Außenwinkel von 360^0 oder einem Vielfachen von 360^0 um die Größe $\pm \delta$ abweicht, so vermindert oder vermehrt man den durch die Messung erhaltenen Werth eines jeden Außenwinkels um den n-ten Theil von δ. Mit den so verbesserten Werthen der Außenwinkel und den durch die Messung erhaltenen Werthen der Seiten berechnet man dann die einzelnen Glieder der Gleichung (2) des §. 135. Weicht die Summe derselben von Null um $\pm$ d ab, so vermindert oder vermehrt man jedes Glied um $\frac{d}{n}$ und bestimmt dann nach der Gleichung (2) des §. 134, indem man die so verbesserten Werthe zu dem willkürlich angenommenen Werthe von x_1 addirt, die Abscissen der einzelnen Ecken. — Eben so berechnet man die sämmtlichen Glieder der Gleichung (3) des §. 135, vermindert oder vermehrt, wenn die Abweichung $= \pm d'$ ist, jedes Glied um $\frac{d'}{n-1}$ und addirt diese verbesserten Werthe zu dem willkürlich angenommenen Werthe der ersten Ordinate y_1.

§. 138. Lehrsatz.

Wenn die Bezeichnung eines Vielecks in der mehrfach festgestellten Folge geordnet ist, so ist der doppelte Inhalt desselben

$$2J = \begin{cases} (x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) + (x_3 - x_4)(y_3 + y_4) \\ \ldots + (x_{n-1} - x_n)(y_{n-1} + y_n) + (x_n - x_1)(y_n + y_1). \end{cases}$$

Beweis. Wir beschränken uns darauf, den Beweis dieses, hauptsächlich in praktischer Hinsicht nützlichen, Satzes für ein Sechseck, Fig. 60, zu führen. Zu diesem Zwecke zeichnen wir für sämmtliche Ecken des Sechsecks die zugehörigen Ordinaten A_1B_1, A_2B_2 u. s. w. Dann wird der Inhalt J des Sechsecks erhalten werden können, wenn wir die Inhalte der entstandenen Trapeze theils addiren, theils subtrahiren. Wie leicht zu sehen, ist der Inhalt des Sechsecks

$$J = \begin{cases} A_3A_4B_3B_4 + A_4A_5B_4B_5 + A_5A_6B_5B_6 \\ - A_6A_1B_6B_1 - A_1A_2B_1B_2 - A_2A_3B_2B_3 \end{cases}$$

Der Inhalt des Trapezes $A_3A_4B_3B_4$ ist bekanntlich gleich

$$\frac{B_3B_4 \cdot (A_3B_3 + A_4B_4)}{2} = \frac{(x_3 - x_4)(y_3 + y_4)}{2}.$$

Drücken wir die Inhalte der übrigen Trapeze auf gleiche Weise aus, setzen die Werthe in die obige Gleichung ein und multipliciren, um die Brüche wegzuschaffen, die ganze Gleichung mit 2, so erhalten wir

$$2J = \begin{cases} (x_3 - x_4)(y_3 + y_4) + (x_4 - x_5)(y_4 + y_5) + (x_5 - x_6)(y_5 + y_6) \\ - (x_1 - x_6)(y_1 + y_6) - (x_2 - x_1)(y_1 + y_2) - (x_3 - x_2)(y_2 + y_3) \end{cases}$$

wofür wir auch setzen können:

$$2J = \begin{cases} (x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) + (x_3 - x_4)(y_3 + y_4) \\ + (x_4 - x_5)(y_4 + y_5) + (x_5 - x_6)(y_5 + y_6) + (x_6 - x_1)(y_6 + y_1). \end{cases}$$

In ähnlicher Art, wie wir den Beweis für das in der Figur 60 gezeichnete Sechseck geführt haben, läßt sich die Richtigkeit des Satzes auch für jedes andere Vieleck darthun.

Nach §. 134 ist

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= - a_1 \cos \alpha_1 \\ x_2 - x_3 &= - a_2 \cos \alpha_2 \\ &\vdots \\ x_{n-1} - x_n &= - a_{n-1} \cos \alpha_{n-1} \\ x_n - x_1 &= a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2 \ldots . + a_{n-1} \cos \alpha_{n-1}. \end{aligned}$$

Setzen wir diese Werthe in die allgemeine Gleichung des vorliegenden §. ein, so verwandelt sich dieselbe in:

$$2J = \begin{cases} - a_1 \cos \alpha_1 (y_1 + y_2) - a_2 \cos \alpha_2 (y_2 + y_3) \\ - a_3 \cos \alpha_3 (y_3 + y_4) \ldots - a_{n-1} \cos \alpha_{n-1} (y_{n-1} + y_n) \\ + (a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2 + a_3 \cos \alpha_3 \ldots + a_{n-1} \cos \alpha_{n-1})(y_n + y_1) \end{cases}$$

oder, wenn wir diejenigen Glieder, welche die nämliche Seite a_1 oder a_2 oder a_3 ... zum Factor haben, zusammenziehen,

$$2J = \begin{cases} a_1 \cos \alpha_1 (y_n - y_1 + y_1 - y_2) + a_2 \cos \alpha_2 (y_n - y_2 + y_1 - y_3) \\ + a_3 \cos \alpha_3 (y_n - y_3 + y_1 - y_4) \ldots + a_{n-1} \cos \alpha_{n-1} (y_n - y_{n-1} + y_1 - y_n). \end{cases}$$

Nach §. 134 ist

$$\begin{aligned} y_n - y_1 + y_1 - y_2 &= a_2 \sin \alpha_2 + a_3 \sin \alpha_3 + a_4 \sin \alpha_4 \ldots + a_{n-1} \sin \alpha_{n-1} \\ y_n - y_2 + y_1 - y_3 &= - a_1 \sin \alpha_1 + a_3 \sin \alpha_3 + a_4 \sin \alpha_4 \ldots + a_{n-1} \sin \alpha_{n-1} \\ y_n - y_3 + y_1 - y_4 &= - a_1 \sin \alpha_1 - a_2 \sin \alpha_2 + a_4 \sin \alpha_4 \ldots + a_{n-1} \sin \alpha_{n-1} \\ &\vdots \\ y_n - y_{n-1} + y_1 - y_n &= - a_1 \sin \alpha_1 - a_2 \sin \alpha_2 - a_3 \sin \alpha_3 \ldots - a_{n-2} \sin \alpha_{n-2}, \end{aligned}$$

folglich, wenn wir diese Werthe in die vorhergehende Gleichung einsetzen,

$$2J = \begin{cases} a_1 \cos \alpha_1 (a_2 \sin \alpha_2 + a_3 \sin \alpha_3 + a_4 \sin \alpha_4 \ldots + a_{n-1} \sin \alpha_{n-1}) \\ + a_2 \cos \alpha_2 (- a_1 \sin \alpha_1 + a_3 \sin \alpha_3 + a_4 \sin \alpha_4 \ldots + a_{n-1} \sin \alpha_{n-1}) \\ + a_3 \cos \alpha_3 (- a_1 \sin \alpha_1 - a_2 \sin \alpha_2 + a_4 \sin \alpha_4 \ldots + a_{n-1} \sin \alpha_{n-1}) \\ \quad \vdots \\ + a_{n-1} \cos \alpha_{n-1} (- a_1 \sin \alpha_1 - a_2 \sin \alpha_2 - a_3 \sin \alpha_3 \ldots - a_{n-2} \sin \alpha_{n-2}). \end{cases}$$

Wenn wir die Parenthesen auflösen und die Glieder, welche die nämlichen Seiten zu Factoren haben, zusammenziehen, indem wir zugleich die bekannte Formel

$$\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \sin (\alpha - \beta)$$

anwenden, so verwandelt sich die vorhergehende Gleichung in:

$$2J = \begin{cases} a_1\, a_2 \sin(\alpha_2 - \alpha_1) + a_1\, a_3 \sin(\alpha_3 - \alpha_1) + a_1\, a_4 \sin(\alpha_4 - \alpha_1) \ldots + a_1\, a_{n-1} \sin(\alpha_{n-1} - \alpha_1) \\ \qquad + a_2\, a_3 \sin(\alpha_3 - \alpha_2) + a_2\, a_4 \sin(\alpha_4 - \alpha_2) \ldots + a_2\, a_{n-1} \sin(\alpha_{n-1} - \alpha_2) \\ \qquad\qquad + a_3\, a_4 \sin(\alpha_4 - \alpha_3) \ldots + a_3\, a_{n-1} \sin(\alpha_{n-1} - \alpha_3) \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad + a_{n-2}\, a_{n-1} \sin(\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2}). \end{cases}$$

Setzen wir endlich noch statt $\alpha_2, \alpha_3 \ldots$ ihre Werthe

$$\alpha_2 = \alpha_1 + A_2$$
$$\alpha_3 = \alpha_1 + A_2 + A_3$$
$$\alpha_4 = \alpha_1 + A_2 + A_3 + A_4$$
$$\vdots$$
$$\alpha_{n-1} = \alpha_1 + A_2 + A_3 + A_4 \ldots + A_{n-1},$$

so geht die zuletzt erhaltene Gleichung über in

$$2J = \begin{cases} a_1\, a_2 \sin A_2 + a_1\, \alpha_3 \sin(A_2 + A_3) + a_1\, a_4 \sin(A_2 + A_3 + A_4) \ldots + a_1\, a_{n-1} \sin(A_2 + A_3 \ldots + A_{n-1}) \\ \qquad + a_2\, a_3 \sin A_3 + a_2\, a_4 \sin(A_3 + A_4) \ldots + a_2\, a_{n-1} \sin(A_3 + A_4 \ldots + A_{n-1}) \\ \qquad\qquad + a_3\, a_4 \sin A_4 \ldots + a_3\, a_{n-1} \sin(A_4 + A_5 \ldots + A_{n-1}) \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad + a_{n-2}\, a_{n-1} \sin A_{n-1}. \end{cases}$$

Diese Gleichung lehrt den Inhalt eines Vielecks finden, wenn von demselben alle Seiten und Winkel bis auf eine Seite (a_n) und die beiden ihr anliegenden Winkel (A_1 und A_n), also wenn von dem Vielecke n — 1 Seiten

$$a_1, a_2, a_3 \ldots . a_{n-1}$$

und die n — 2 Außenwinkel

$$A_2, A_3 \ldots A_{n-1}$$

gegeben sind. Dieselbe läßt sich in Worten also aussprechen: Der Inhalt eines beliebigen Vielecks ist gleich der halben Summe der sämmtlichen Producte, welche entstehen, wenn man je zwei Seiten und den Sinus der Summe der zwischen ihnen liegenden Außenwinkel mit einander multiplicirt.

Inhalt.

Tafel

der

Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten

von 10 zu 10 Minuten

für

alle Winkel zwischen 0 und 90°.

G.	M.	Sinus	Tang.			G.	M.	Sinus	Tang.			G.	M.	Sinus	Tang.		
0	0	0,0000	0,0000	60		6	0	0,1045	0,1051	60		12	0	0,2079	0,2126	60	
	10	0,0029	0,0029	50			10	0,1074	0,1080	50			10	0,2108	0,2156	50	
	20	0,0058	0,0058	40			20	0,1103	0,1110	40			20	0,2136	0,2186	40	
	30	0,0087	0,0087	30			30	0,1132	0,1139	30			30	0,2164	0,2217	30	
	40	0,0116	0,0116	20			40	0,1161	0,1169	20			40	0,2193	0,2247	20	
	50	0,0145	0,0145	10			50	0,1190	0,1198	10			50	0,2221	0,2278	10	
	60	0,0175	0,0175	0	89		60	0,1219	0,1228	0	83		60	0,2250	0,2309	0	77
1	0	0,0175	0,0175	60		7	0	0,1219	0,1228	60		13	0	0,2250	0,2309	60	
	10	0,0204	0,0204	50			10	0,1248	0,1257	50			10	0,2278	0,2339	50	
	20	0,0233	0,0233	40			20	0,1276	0,1287	40			20	0,2306	0,2370	40	
	30	0,0262	0,0262	30			30	0,1305	0,1317	30			30	0,2334	0,2401	30	
	40	0,0291	0,0291	20			40	0,1334	0,1346	20			40	0,2363	0,2432	20	
	50	0,0320	0,0320	10			50	0,1363	0,1376	10			50	0,2391	0,2462	10	
	60	0,0349	0,0349	0	88		60	0,1392	0,1405	0	82		60	0,2419	0,2493	0	76
2	0	0,0349	0,0349	60		8	0	0,1392	0,1405	60		14	0	0,2419	0,2493	60	
	10	0,0378	0,0378	50			10	0,1421	0,1435	50			10	0,2447	0,2524	50	
	20	0,0407	0,0407	40			20	0,1449	0,1465	40			20	0,2476	0,2555	40	
	30	0,0436	0,0437	30			30	0,1478	0,1495	30			30	0,2504	0,2586	30	
	40	0,0465	0,0466	20			40	0,1507	0,1524	20			40	0,2532	0,2617	20	
	50	0,0494	0,0495	10			50	0,1536	0,1554	10			50	0,2560	0,2648	10	
	60	0,0523	0,0524	0	87		60	0,1564	0,1584	0	81		60	0,2588	0,2679	0	75
3	0	0,0523	0,0524	60		9	0	0,1564	0,1584	60		15	0	0,2588	0,2679	60	
	10	0,0552	0,0553	50			10	0,1593	0,1614	50			10	0,2616	0,2711	50	
	20	0,0581	0,0582	40			20	0,1622	0,1644	40			20	0,2644	0,2742	40	
	30	0,0610	0,0612	30			30	0,1650	0,1673	30			30	0,2672	0,2773	30	
	40	0,0640	0,0641	20			40	0,1679	0,1703	20			40	0,2700	0,2805	20	
	50	0,0669	0,0670	10			50	0,1708	0,1733	10			50	0,2728	0,2836	10	
	60	0,0698	0,0699	0	86		60	0,1736	0,1763	0	80		60	0,2756	0,2867	0	74
4	0	0,0698	0,0699	60		10	0	0,1736	0,1763	60		16	0	0,2756	0,2867	60	
	10	0,0727	0,0729	50			10	0,1765	0,1793	50			10	0,2784	0,2899	50	
	20	0,0756	0,0758	40			20	0,1794	0,1823	40			20	0,2812	0,2931	40	
	30	0,0785	0,0787	30			30	0,1822	0,1853	30			30	0,2840	0,2962	30	
	40	0,0814	0,0816	20			40	0,1851	0,1883	20			40	0,2868	0,2994	20	
	50	0,0843	0,0846	10			50	0,1880	0,1914	10			50	0,2896	0,3026	10	
	60	0,0872	0,0875	0	85		60	0,1908	0,1944	0	79		60	0,2924	0,3057	0	73
5	0	0,0872	0,0875	60		11	0	0,1908	0,1944	60		17	0	0,2924	0,3057	60	
	10	0,0901	0,0904	50			10	0,1937	0,1974	50			10	0,2952	0,3089	50	
	20	0,0929	0,0934	40			20	0,1965	0,2004	40			20	0,2979	0,3121	40	
	30	0,0958	0,0963	30			30	0,1994	0,2035	30			30	0,3007	0,3153	30	
	40	0,0987	0,0992	20			40	0,2022	0,2065	20			40	0,3035	0,3185	20	
	50	0,1016	0,1022	10			50	0,2051	0,2095	10			50	0,3062	0,3217	10	
	60	0,1045	0,1051	0	84		60	0,2079	0,2126	0	78		60	0,3090	0,3249	0	72
		Cosin.	Cotang	M.	G.			Cosin.	Cotang	M.	G.			Cosin.	Cotang	M.	G.

G.	M.	Sinus	Tang.			G.	M.	Sinus	Tang.			G.	M.	Sinus	Tang.		
18	0	0,3090	0,3249	60		26	0	0,4384	0,4877	60		34	0	0,5592	0,6745	60	
	10	0,3118	0,3281	50			10	0,4410	0,4913	50			10	0,5616	0,6787	50	
	20	0,3145	0,3314	40			20	0,4436	0,4950	40			20	0,5640	0,6830	40	
	30	0,3173	0,3346	30			30	0,4462	0,4986	30			30	0,5664	0,6873	30	
	40	0,3201	0,3378	20			40	0,4488	0,5022	20			40	0,5688	0,6916	20	
	50	0,3228	0,3411	10			50	0,4514	0,5059	10			50	0,5712	0,6959	10	
	60	0,3256	0,3443	0	71		60	0,4540	0,5095	0	63		60	0,5736	0,7002	0	55
19	0	0,3256	0,3443	60		27	0	0,4540	0,5095	60		35	0	0,5736	0,7002	60	
	10	0,3283	0,3476	50			10	0,4566	0,5132	50			10	0,5760	0,7046	50	
	20	0,3311	0,3508	40			20	0,4592	0,5169	40			20	0,5783	0,7089	40	
	30	0,3338	0,3541	30			30	0,4617	0,5206	30			30	0,5807	0,7133	30	
	40	0,3365	0,3574	20			40	0,4643	0,5243	20			40	0,5831	0,7177	20	
	50	0,3393	0,3607	10			50	0,4669	0,5280	10			50	0,5854	0,7221	10	
	60	0,3420	0,3640	0	70		60	0,4695	0,5317	0	62		60	0,5878	0,7265	0	54
20	0	0,3420	0,3640	60		28	0	0,4695	0,5317	60		36	0	0,5878	0,7265	60	
	10	0,3448	0,3673	50			10	0,4720	0,5354	50			10	0,5901	0,7310	50	
	20	0,3475	0,3706	40			20	0,4746	0,5392	40			20	0,5925	0,7355	40	
	30	0,3502	0,3739	30			30	0,4772	0,5430	30			30	0,5948	0,7400	30	
	40	0,3529	0,3772	20			40	0,4797	0,5467	20			40	0,5972	0,7445	20	
	50	0,3557	0,3805	10			50	0,4823	0,5505	10			50	0,5995	0,7490	10	
	60	0,3584	0,3839	0	69		60	0,4848	0,5543	0	61		60	0,6018	0,7536	0	53
21	0	0,3584	0,3839	60		29	0	0,4848	0,5543	60		37	0	0,6018	0,7536	60	
	10	0,3611	0,3872	50			10	0,4874	0,5581	50			10	0,6041	0,7581	50	
	20	0,3638	0,3906	40			20	0,4899	0,5619	40			20	0,6065	0,7627	40	
	30	0,3665	0,3939	30			30	0,4924	0,5658	30			30	0,6088	0,7673	30	
	40	0,3692	0,3973	20			40	0,4950	0,5696	20			40	0,6111	0,7720	20	
	50	0,3719	0,4006	10			50	0,4975	0,5735	10			50	0,6134	0,7766	10	
	60	0,3746	0,4040	0	68		60	0,5000	0,5774	0	60		60	0,6157	0,7813	0	52
22	0	0,3746	0,4040	60		30	0	0,5000	0,5774	60		38	0	0,6157	0,7813	60	
	10	0,3773	0,4074	50			10	0,5025	0,5812	50			10	0,6180	0,7860	50	
	20	0,3800	0,4108	40			20	0,5050	0,5851	40			20	0,6202	0,7907	40	
	30	0,3827	0,4142	30			30	0,5075	0,5890	30			30	0,6225	0,7954	30	
	40	0,3854	0,4176	20			40	0,5100	0,5930	20			40	0,6248	0,8002	20	
	50	0,3881	0,4210	10			50	0,5125	0,5969	10			50	0,6271	0,8050	10	
	60	0,3907	0,4245	0	67		60	0,5150	0,6009	0	59		60	0,6293	0,8098	0	51
23	0	0,3907	0,4245	60		31	0	0,5150	0,6009	60		39	0	0,6293	0,8098	60	
	10	0,3934	0,4279	50			10	0,5175	0,6048	50			10	0,6316	0,8146	50	
	20	0,3961	0,4314	40			20	0,5200	0,6088	40			20	0,6338	0,8195	40	
	30	0,3987	0,4348	30			30	0,5225	0,6128	30			30	0,6361	0,8243	30	
	40	0,4014	0,4383	20			40	0,5250	0,6168	20			40	0,6383	0,8292	20	
	50	0,4041	0,4417	10			50	0,5275	0,6208	10			50	0,6406	0,8342	10	
	60	0,4067	0,4452	0	66		60	0,5299	0,6249	0	58		60	0,6428	0,8391	0	50
24	0	0,4067	0,4452	60		32	0	0,5299	0,6249	60		40	0	0,6428	0,8391	60	
	10	0,4094	0,4487	50			10	0,5324	0,6289	50			10	0,6450	0,8441	50	
	20	0,4120	0,4522	40			20	0,5348	0,6330	40			20	0,6472	0,8491	40	
	30	0,4147	0,4557	30			30	0,5373	0,6371	30			30	0,6494	0,8541	30	
	40	0,4173	0,4592	20			40	0,5398	0,6412	20			40	0,6517	0,8591	20	
	50	0,4200	0,4628	10			50	0,5422	0,6453	10			50	0,6539	0,8642	10	
	60	0,4226	0,4663	0	65		60	0,5446	0,6494	0	57		60	0,6561	0,8693	0	49
25	0	0,4226	0,4663	60		33	0	0,5446	0,6494	60		41	0	0,6561	0,8693	60	
	10	0,4253	0,4699	50			10	0,5471	0,6536	50			10	0,6583	0,8744	50	
	20	0,4279	0,4734	40			20	0,5495	0,6577	40			20	0,6604	0,8796	40	
	30	0,4305	0,4770	30			30	0,5519	0,6619	30			30	0,6626	0,8847	30	
	40	0,4331	0,4806	20			40	0,5544	0,6661	20			40	0,6648	0,8899	20	
	50	0,4358	0,4841	10			50	0,5568	0,6703	10			50	0,6670	0,8952	10	
	60	0,4384	0,4877	0	64		60	0,5592	0,6745	0	56		60	0,6691	0,9004	0	48
		Cosin.	Cotang	M.	G.			Cosin.	Cotang	M.	G.			Cosin.	Cotang	M.	G.

G.	M.	Sinus	Tang.		
42	0	0,6691	0,9004	60	
	10	0,6713	0,9057	50	
	20	0,6734	0,9110	40	
	30	0,6756	0,9163	30	
	40	0,6777	0,9217	20	
	50	0,6799	0,9271	10	
	60	0,6820	0,9325	0	47
43	0	0,6820	0,9325	60	
	10	0,6841	0,9380	50	
	20	0,6862	0,9435	40	
	30	0,6884	0,9490	30	
	40	0,6905	0,9545	20	
	50	0,6926	0,9601	10	
	60	0,6947	0,9657	0	46
44	0	0,6947	0,9657	60	
	10	0,6967	0,9713	50	
	20	0,6988	0,9770	40	
	30	0,7009	0,9827	30	
	40	0,7030	0,9884	20	
	50	0,7050	0,9942	10	
	60	0,7071	1,0000	0	45
45	0	0,7071	1,0000	60	
	10	0,7092	1,0058	50	
	20	0,7112	1,0117	40	
	30	0,7133	1,0176	30	
	40	0,7153	1,0235	20	
	50	0,7173	1,0295	10	
	60	0,7193	1,0355	0	44
46	0	0,7193	1,0355	60	
	10	0,7214	1,0416	50	
	20	0,7234	1,0477	40	
	30	0,7254	1,0538	30	
	40	0,7274	1,0599	20	
	50	0,7294	1,0661	10	
	60	0,7314	1,0724	0	43
47	0	0,7314	1,0724	60	
	10	0,7333	1,0786	50	
	20	0,7353	1,0850	40	
	30	0,7373	1,0913	30	
	40	0,7392	1,0977	20	
	50	0,7412	1,1041	10	
	60	0,7431	1,1106	0	42
48	0	0,7431	1,1106	60	
	10	0,7451	1,1171	50	
	20	0,7470	1,1237	40	
	30	0,7490	1,1303	30	
	40	0,7509	1,1369	20	
	50	0,7528	1,1436	10	
	60	0,7547	1,1504	0	41
49	0	0,7547	1,1504	60	
	10	0,7566	1,1571	50	
	20	0,7585	1,1640	40	
	30	0,7604	1,1708	30	
	40	0,7623	1,1778	20	
	50	0,7642	1,1847	10	
	60	0,7660	1,1918	0	40
		Cosin.	Cotang	M.	G.

G.	M.	Sinus	Tang.		
50	0	0,7660	1,1918	60	
	10	0,7679	1,1988	50	
	20	0,7698	1,2059	40	
	30	0,7716	1,2131	30	
	40	0,7735	1,2203	20	
	50	0,7753	1,2276	10	
	60	0,7771	1,2349	0	39
51	0	0,7771	1,2349	60	
	10	0,7790	1,2423	50	
	20	0,7808	1,2497	40	
	30	0,7826	1,2572	30	
	40	0,7844	1,2647	20	
	50	0,7862	1,2723	10	
	60	0,7880	1,2799	0	38
52	0	0,7880	1,2799	60	
	10	0,7898	1,2876	50	
	20	0,7916	1,2954	40	
	30	0,7934	1,3032	30	
	40	0,7951	1,3111	20	
	50	0,7969	1,3190	10	
	60	0,7986	1,3270	0	37
53	0	0,7986	1,3270	60	
	10	0,8004	1,3351	50	
	20	0,8021	1,3432	40	
	30	0,8039	1,3514	30	
	40	0,8056	1,3597	20	
	50	0,8073	1,3680	10	
	60	0,8090	1,3764	0	36
54	0	0,8090	1,3764	60	
	10	0,8107	1,3848	50	
	20	0,8124	1,3934	40	
	30	0,8141	1,4019	30	
	40	0,8158	1,4106	20	
	50	0,8175	1,4193	10	
	60	0,8192	1,4281	0	35
55	0	0,8192	1,4281	60	
	10	0,8208	1,4370	50	
	20	0,8225	1,4460	40	
	30	0,8241	1,4550	30	
	40	0,8258	1,4641	20	
	50	0,8274	1,4733	10	
	60	0,8290	1,4826	0	34
56	0	0,8290	1,4826	60	
	10	0,8307	1,4919	50	
	20	0,8323	1,5013	40	
	30	0,8339	1,5108	30	
	40	0,8355	1,5204	20	
	50	0,8371	1,5301	10	
	60	0,8387	1,5399	0	33
57	0	0,8387	1,5399	60	
	10	0,8403	1,5497	50	
	20	0,8418	1,5597	40	
	30	0,8434	1,5697	30	
	40	0,8450	1,5798	20	
	50	0,8465	1,5900	10	
	60	0,8480	1,6003	0	32
		Cosin.	Cotang	M.	G.

G.	M.	Sinus	Tang.		
58	0	0,8480	1,6003	60	
	10	0,8496	1,6107	50	
	20	0,8511	1,6212	40	
	30	0,8526	1,6319	30	
	40	0,8542	1,6426	20	
	50	0,8557	1,6534	10	
	60	0,8572	1,6643	0	31
59	0	0,8572	1,6643	60	
	10	0,8587	1,6753	50	
	20	0,8601	1,6864	40	
	30	0,8616	1,6977	30	
	40	0,8631	1,7090	20	
	50	0,8646	1,7205	10	
	60	0,8660	1,7321	0	30
60	0	0,8660	1,7321	60	
	10	0,8675	1,7437	50	
	20	0,8689	1,7556	40	
	30	0,8704	1,7675	30	
	40	0,8718	1,7796	20	
	50	0,8732	1,7917	10	
	60	0,8746	1,8040	0	29
61	0	0,8746	1,8040	60	
	10	0,8760	1,8165	50	
	20	0,8774	1,8291	40	
	30	0,8788	1,8418	30	
	40	0,8802	1,8546	20	
	50	0,8816	1,8676	10	
	60	0,8829	1,8807	0	28
62	0	0,8829	1,8807	60	
	10	0,8843	1,8940	50	
	20	0,8857	1,9074	40	
	30	0,8870	1,9210	30	
	40	0,8884	1,9347	20	
	50	0,8897	1,9486	10	
	60	0,8910	1,9626	0	27
63	0	0,8910	1,9626	60	
	10	0,8923	1,9768	50	
	20	0,8936	1,9912	40	
	30	0,8949	2,0057	30	
	40	0,8962	2,0204	20	
	50	0,8975	2,0353	10	
	60	0,8988	2,0503	0	26
64	0	0,8988	2,0503	60	
	10	0,9001	2,0655	50	
	20	0,9013	2,0809	40	
	30	0,9026	2,0965	30	
	40	0,9038	2,1123	20	
	50	0,9051	2,1283	10	
	60	0,9063	2,1445	0	25
65	0	0,9063	2,1445	60	
	10	0,9075	2,1609	50	
	20	0,9088	2,1775	40	
	30	0,9100	2,1943	30	
	40	0,9112	2,2113	20	
	50	0,9124	2,2286	10	
	60	0,9135	2,2460	0	24
		Cosin.	Cotang	M.	G.

G.	M.	Sinus	Tang.		
66	0	0,9135	2,2460	60	
	10	0,9147	2,2637	50	
	20	0,9159	2,2817	40	
	30	0,9171	2,2998	30	
	40	0,9182	2,3183	20	
	50	0,9194	2,3369	10	
	60	0,9205	2,3559	0	23
67	0	0,9205	2,3559	60	
	10	0,9216	2,3750	50	
	20	0,9228	2,3945	40	
	30	0,9239	2,4142	30	
	40	0,9250	2,4342	20	
	50	0,9261	2,4545	10	
	60	0,9272	2,4751	0	22
68	0	0,9272	2,4751	60	
	10	0,9283	2,4960	50	
	20	0,9293	2,5172	40	
	30	0,9304	2,5386	30	
	40	0,9315	2,5605	20	
	50	0,9325	2,5826	10	
	60	0,9336	2,6051	0	21
69	0	0,9336	2,6051	60	
	10	0,9346	2,6279	50	
	20	0,9356	2,6511	40	
	30	0,9367	2,6746	30	
	40	0,9377	2,6985	20	
	50	0,9387	2,7228	10	
	60	0,9397	2,7475	0	20
70	0	0,9397	2,7475	60	
	10	0,9407	2,7725	50	
	20	0,9417	2,7980	40	
	30	0,9426	2,8239	30	
	40	0,9436	2,8502	20	
	50	0,9446	2,8770	10	
	60	0,9455	2,9042	0	19
71	0	0,9455	2,9042	60	
	10	0,9465	2,9319	50	
	20	0,9474	2,9600	40	
	30	0,9483	2,9887	30	
	40	0,9492	3,0178	20	
	50	0,9502	3,0475	10	
	60	0,9511	3,0777	0	18
72	0	0,9511	3,0777	60	
	10	0,9520	3,1084	50	
	20	0,9528	3,1397	40	
	30	0,9537	3,1716	30	
	40	0,9546	3,2041	20	
	50	0,9555	3,2371	10	
	60	0,9563	3,2709	0	17
73	0	0,9563	3,2709	60	
	10	0,9572	3,3052	50	
	20	0,9580	3,3402	40	
	30	0,9588	3,3759	30	
	40	0,9596	3,4124	20	
	50	0,9605	3,4495	10	
	60	0,9613	3,4874	0	16
		Cosin.	Cotang	M.	G.

G.	M.	Sinus	Tang.		
74	0	0,9613	3,4874	60	
	10	0,9621	3,5261	50	
	20	0,9628	3,5656	40	
	30	0,9636	3,6059	30	
	40	0,9644	3,6470	20	
	50	0,9652	3,6891	10	
	60	0,9659	3,7321	0	15
75	0	0,9659	3,7321	60	
	10	0,9667	3,7760	50	
	20	0,9674	3,8208	40	
	30	0,9681	3,8667	30	
	40	0,9689	3,9136	20	
	50	0,9696	3,9617	10	
	60	0,9703	4,0108	0	14
76	0	0,9703	4,0108	60	
	10	0,9710	4,0611	50	
	20	0,9717	4,1126	40	
	30	0,9724	4,1653	30	
	40	0,9730	4,2193	20	
	50	0,9737	4,2747	10	
	60	0,9744	4,3315	0	13
77	0	0,9744	4,3315	60	
	10	0,9750	4,3897	50	
	20	0,9757	4,4494	40	
	30	0,9763	4,5107	30	
	40	0,9769	4,5736	20	
	50	0,9775	4,6382	10	
	60	0,9781	4,7046	0	12
78	0	0,9781	4,7046	60	
	10	0,9787	4,7729	50	
	20	0,9793	4,8430	40	
	30	0,9799	4,9152	30	
	40	0,9805	4,9894	20	
	50	0,9811	5,0658	10	
	60	0,9816	5,1446	0	11
79	0	0,9816	5,1446	60	
	10	0,9822	5,2257	50	
	20	0,9827	5,3093	40	
	30	0,9833	5,3955	30	
	40	0,9838	5,4845	20	
	50	0,9843	5,5764	10	
	60	0,9848	5,6713	0	10
80	0	0,9848	5,6713	60	
	10	0,9853	5,7694	50	
	20	0,9858	5,8708	40	
	30	0,9863	5,9758	30	
	40	0,9868	6,0844	20	
	50	0,9872	6,1970	10	
	60	0,9877	6,3138	0	9
81	0	0,9877	6,3138	60	
	10	0,9881	6,4348	50	
	20	0,9886	6,5606	40	
	30	0,9890	6,6912	30	
	40	0,9894	6,8269	20	
	50	0,9899	6,9682	10	
	60	0,9903	7,1154	0	8
		Cosin.	Cotang	M.	G.

G.	M.	Sinus	Tang.		
82	0	0,9903	7,1154	60	
	10	0,9907	7,2687	50	
	20	0,9911	7,4287	40	
	30	0,9914	7,5958	30	
	40	0,9918	7,7704	20	
	50	0,9922	7,9530	10	
	60	0,9925	8,1443	0	7
83	0	0,9925	8,1443	60	
	10	0,9929	8,3450	50	
	20	0,9932	8,5555	40	
	30	0,9936	8,7769	30	
	40	0,9939	9,0098	20	
	50	0,9942	9,2553	10	
	60	0,9945	9,5144	0	6
84	0	0,9945	9,5144	60	
	10	0,9948	9,7882	50	
	20	0,9951	10,078	40	
	30	0,9954	10,385	30	
	40	0,9957	10,712	20	
	50	0,9959	11,059	10	
	60	0,9962	11,430	0	5
85	0	0,9962	11,430	60	
	10	0,9964	11,826	50	
	20	0,9967	12,251	40	
	30	0,9969	12,706	30	
	40	0,9971	13,197	20	
	50	0,9974	13,727	10	
	60	0,9976	14,301	0	4
86	0	0,9976	14,301	60	
	10	0,9978	14,924	50	
	20	0,9980	15,605	40	
	30	0,9981	16,350	30	
	40	0,9983	17,169	20	
	50	0,9985	18,075	10	
	60	0,9986	19,081	0	3
87	0	0,9986	19,081	60	
	10	0,9988	20,206	50	
	20	0,9989	21,470	40	
	30	0,9990	22,904	30	
	40	0,9992	24,542	20	
	50	0,9993	26,432	10	
	60	0,9994	28,636	0	2
88	0	0,9994	28,636	60	
	10	0,9995	31,242	50	
	20	0,9996	34,368	40	
	30	0,9997	38,188	30	
	40	0,9997	42,964	20	
	50	0,9998	49,104	10	
	60	,99985	57,290	0	1
89	0	,99985	57,290	60	
	10	,99989	68,750	50	
	20	,99993	85,940	40	
	30	,99996	114,59	30	
	40	,99998	171,89	20	
	50	,999996	343,77	10	
	60	1,0000	infin.	0	0
		Cosin.	Cotang	M.	G.

Koppe, Karl Friedrich August,

Die ebene Trigonometrie für den Schul- und Selbst-Unterricht von Karl Koppe Mit 5 Figurentafeln

Essen 1879